



1905

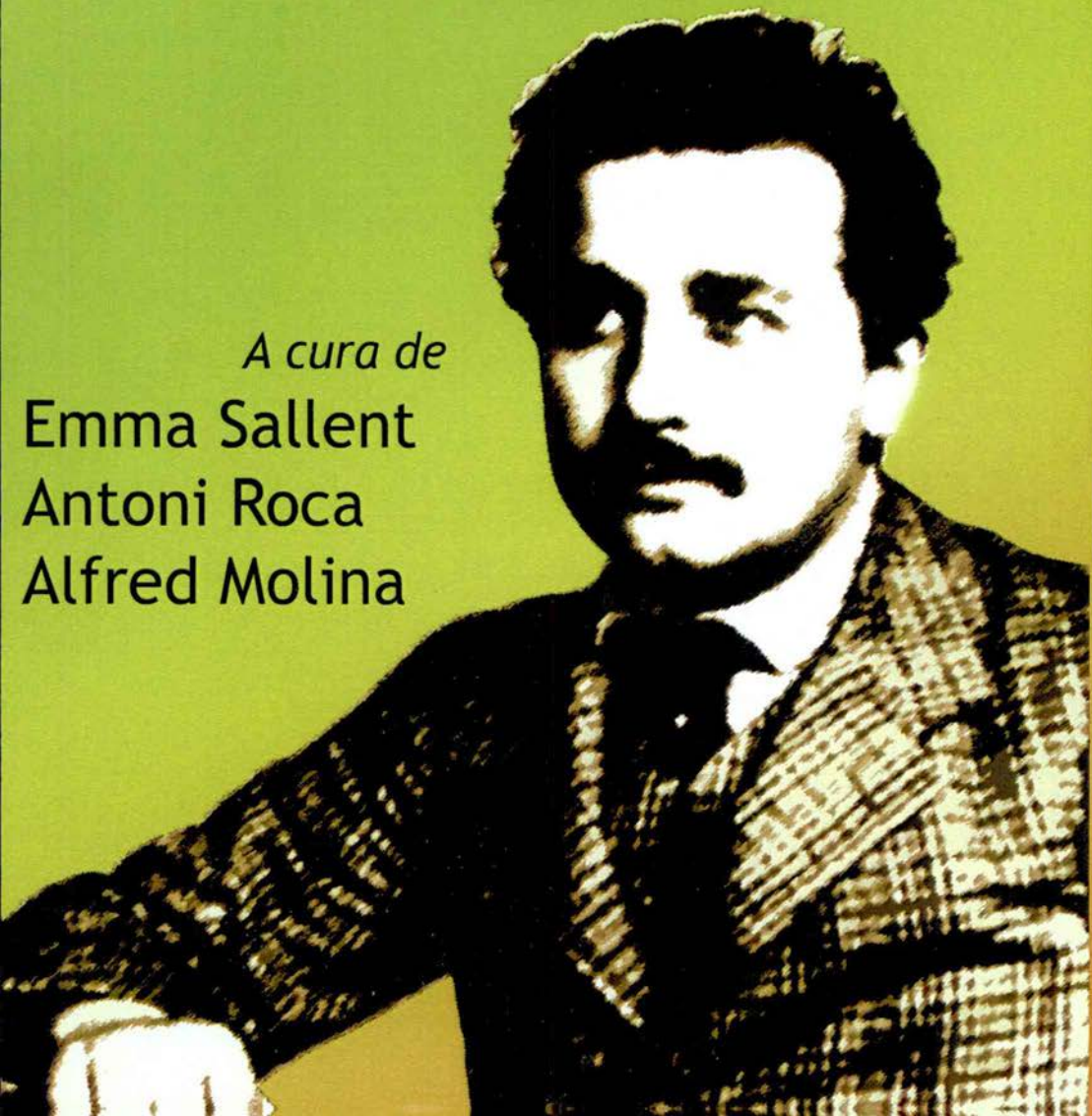
El jove Einstein en català

A cura de

Emma Sallent

Antoni Roca

Alfred Molina



1905 EL JOVE EINSTEIN EN CATALÀ

Editors:

Emma Sallent

Antoni Roca

Alfred Molina

Societat Catalana de Física i

Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica

Institut d'Estudis Catalans

This One



6XQZ-80B-CQ3L

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

1905, el jove Einstein en català

Textos en català i alemany, estudis introductoris en català. —

Cronologia. Bibliografia. Índex

ISBN 84-7283-808-0

I. Sallent, Emma, ed. II. Roca, Antoni, ed. III. Molina, Alfred, ed.

IV. Einstein, Albert V. Societat Catalana de Física

VI. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica

VII. Títol: El Jove Einstein en català

1. Einstein, Albert 2. Físics — Biografia 3. Física — Història — S. XX

Serveis Lingüístics de la Universitat de Barcelona

Disseny portada: J. M. Caballés

© Autors dels articles: Luis Navarro i Xavier Roqué

© Autors de les traduccions: Oliver Strunk i Xavier Roqué

© The Jewish National & University Library. Albert Einstein Archives

© Societat Catalana de Física i Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, filials de l'Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició

Primera edició: novembre de 2005

Imprès a Gráficas Rey S.L. C. Albert Einstein, 54. Cornellà de Llobregat

ISBN: 84-7283-808-0

Dipòsit legal: B-48041-2005

Aquesta publicació ha rebut el suport de la Direcció General d'Universitats (DURSI) Generalitat de Catalunya i del Plan Nacional de I+D+I (2004-2007) del Ministerio de Educación y Ciencia.

Queden rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

Presentació	7
Cronologia: Albert Einstein	9
1 Un jove agosarat i feliç	18
Imatges del jove Einstein	28
2 Quàntums d'energia, efecte fotoelèctric i més coses	34
2.1 Antecedents	34
2.2 Contingut de «Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de llum»	39
2.3 Primer impacte	47
Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum	55
«Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt»	75
3 De la constitució molecular de la matèria al moviment brownià	93
3.1 Antecedents	93
3.2 Contingut de «Sobre el moviment de partícules en suspensió en líquids en repòs, que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor»	100
3.3 Primer impacte	104
Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor	110
«Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden	

Flüssigkeiten suspendierten Teilchen»	123
4 Del principi de relativitat a la teoria de la relativitat especial	136
4.1 Antecedents	139
4.2 Contingut de «Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment»	148
4.3 L'equivalència entre massa i energia	153
4.4 Primer impacte	155
Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment	158
«Zur Elektrodynamik bewegter Körper»	194
La inèrcia d'un cos, depèn de l'energia que conté?	226
«Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?»	231
Imatges d'Einstein a Catalunya	235
Bibliografia	239
Índex alfabètic	249

Presentació

Llegir Einstein en català al segle XXI... Així començava la introducció del llibre publicat per les nostres societats el 1998, que contenia els tres articles essencials que Einstein va publicar el 1905, el seu *annus mirabilis*, i que han marcat profundament el desenvolupament de la física al segle XX. Aquesta edició de 1998, que va formar part de la commemoració dels 75 anys de l'estada d'Einstein a Barcelona, ha tingut un èxit sorprenent i, avui dia, està esgotada. Hem volgut aprofitar el fet de trobar-nos en plena celebració de l'Any Mundial de la Física, el 2005, per fer una nova edició dels articles d'Einstein, que és la que teniu a les mans.

Oliver Strunck i Xavier Roqué han fet les traduccions dels textos, que han estat totalment revisades per Emma Sallent, Luis Navarro i Alfred Molina. Una de les novetats d'aquesta edició és la publicació d'un quart article d'Einstein de 1905, traduït per Xavier Roqué, on apareix per primera vegada l'expressió $E = mc^2$. L'edició també incorpora una presentació de cadascun dels quatre articles d'Einstein, que han preparat Luis Navarro i Xavier Roqué. I com a tercera novetat, s'hi publiquen conjuntament les versions originals en alemany dels articles esmentats. Notareu també que els editors s'han esforçat a oferir una versió catalana que mantingui les característiques tipogràfiques de les versions originals dels articles. Finalment s'hi han afegit unes fotografies del jove Einstein fins al 1905 i unes altres de la seva estada a Catalunya el 1923.

Com ja hem dit, l'edició anterior ha tingut un èxit molt satisfactori, que posa de manifest la bona acollida que té la literatura científica en llengua catalana a la nostra societat, i que fa palès el fet que la cultura catalana també inclou la cultura científica com una part pròpia i inseparable. Cal insistir en aquest fet perquè, avui dia, una cultura nacional que no inclogui la ciència és una cultura coixa i limitada. D'una banda, hi ha un gran camp de possibilitats per a la divulgació científica en llengua catalana —i el llibre que teniu a les mans no és de divulgació— i, de l'altra, hi

ha una profunda necessitat de culturització científica de la nostra societat. La universalitat del coneixement científic, que fa necessari l'ús de llengües de gran abast, com ara l'anglès, quan es tracta de la comunicació i l'intercanvi entre membres de la comunitat científica internacional, no està renyida amb el fet que els científics de parla catalana tinguin àmbits propis de comunicació i puguin utilitzar també la seva llengua per difondre la cultura científica. Al contrari, és un gran bé per a la mateixa societat, per a la ciència i per a la llengua.

Aprofitant l'ocasió del centenari de l'*annus mirabilis* d'Einstein, el 2005 ha estat proclamat Any Mundial de la Física per l'assemblea general de l'ONU en una declaració aprovada el 10 de juny de 2004. En aquesta declaració es constata el paper de la física en la comprensió de la natura i en els avenços tecnològics i se'ns fa una crida per celebrar aquest esdeveniment i donar-li el relleu que es mereix. Les nostres societats han impulsat un seguit d'activitats per celebrar l'Any de la Física i aquest llibre es publica oportunament en el marc d'aquesta celebració. Esperem que sigui ben rebut.

Josep Maria Pons Ràfols

President de la Societat Catalana de Física (SCF)

Antoni Roca Rosell

President de la Societat Catalana d'Història
de la Ciència i de la Tècnica (SCHCT)

Cronologia: Albert Einstein

Els primers anys

1879 Albert Einstein neix a Ulm (Alemanya), el 14 de març.

1880 La família es trasllada a Munic.

1885 Comença l'ensenyament primari públic a Munic.

▷ Rep ensenyaments sobre judaisme, a casa, i sobre catolicisme, a l'escola.

1888–94 Cursa l'ensenyament secundari al Luitpold-Gymnasium de Munic, on rep ensenyaments sobre judaisme.

1894 La seva família es trasllada a Milano. Sis mesos després —a la primavera de 1895— Einstein els segueix, sense haver acabat els estudis secundaris a Munic.

Els anys suïssos

1895 Fracassa en el primer intent d'admissió al prestigiós ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) de Zuric.

1896 Renuncia a la nacionalitat alemanya (serà apàtrida durant cinc anys).

▷ Coneix, en una vetllada musical, Michele Angelo Besso, que serà amic i confident, científic i personal, durant la resta de la seva vida.

▷ Ingressa a l'ETH, on coneix dos companys d'estudis que tindran un paper important en la seva vida: Marcel Grossman i Mileva Maric, amb la qual aviat estableix relacions afectives.

1900 Finalitza els estudis a l'ETH. El diploma l'habilita per ensenyar física i matemàtiques a l'ensenyament secundari.

- 1901** Obté la nacionalitat suïssa, que mai no abandonarà.
- ▷ Per raons mèdiques queda lliure del servei militar suís.
 - ▷ Presenta una primera tesi doctoral —que és rebutjada— a la Universität Zürich.
 - ▷ Persegueix, sense èxit, diferents llocs de treball permanents.
 - ▷ Apareix publicat el seu primer treball científic —sobre capillaritat— en la prestigiosa revista *Annalen der Physik*.
- 1902** Obté el seu primer lloc de treball: perit tècnic de tercera classe a l'Oficina Suïssa de Patents, a Berna.
- ▷ Durant el prometatge d'Einstein i Marič neix a Novi Sad (avui, Sèrbia) la seva filla Lieserl. Gairebé no es conserven dades sobre la nena; se suposa que devia morir de seguida o va ser adoptada amb les màximes garanties de seguretat, ateses les circumstàncies.
 - ▷ El pare d'Einstein mor a Milano.
- 1903** Matrimoni d'Albert Einstein i Mileva Marič.
- ▷ Einstein, juntament amb Konrad Habicht (que venia de Zuric per completar els estudis de matemàtiques a Berna) i Maurice Solovine (romanès de formació filosòfica), funden la que van decidir anomenar Acadèmia Olímpia.
- 1904** Neix el seu primer fill, Hans Albert, a Berna, que serà un enginyer hidràulic prestigiós.
- 1905** És l'anomenat *annus mirabilis* d'Einstein, per la quantitat i la transcendència de les seves creacions en aquest curt interval de temps.
- ▷ Apareixen publicats als *Annalen der Physik* tres treballs que després esdevindran pilars de la física del segle XX: un sobre la hipòtesi dels quàntums de llum, un altre sobre el moviment brownià i un tercer sobre la seva teoria de la relativitat especial.
 - ▷ Presenta la seva tesi doctoral a la Universität Zürich. Aquesta vegada el seu treball és acceptat i es publica ja el 1906.

▷ En un cinquè treball completa la seva teoria de la relativitat especial i presenta la primera versió de $E = mc^2$.

1906 És ascendit a tècnic de segona classe a l'Oficina Suïssa de Patents.

▷ Publica el seu primer treball en què aplica la teoria quàntica al càlcul de la calor específica dels sòlids cristal·lins.

1907 Publica «la idea més feliç de la seva vida»: el principi d'equivalència (entre acceleració i camp gravitatori), que representa un primer pas cap a la seva teoria de la relativitat general.

1908 És admès com a *Privatdozent* —nivell més baix del professorat, sense retribució econòmica fixa— a la Universität Bern.

1909 Renuncia a la feina a l'Oficina de Patents i al nomenament com a *Privatdozent* a Berna, per passar a ocupar una plaça de professor adjunt de física teòrica a la Universität Zürich.
▷ Rep el seu primer doctorat *honoris causa*, per la Université de Genève.

1910 Neix el seu segon fill, Eduard, a Zuric. Patirà esquizofrènia durant tota la seva vida.

▷ Publica un treball sobre fluctuacions estadístiques, en el qual —entre altres coses— explica el perquè del color blau del cel en termes relativament senzills.

1911 És nomenat catedràtic de la Universitat Karl-Ferdinand, de Praga.

▷ Se celebra el Primer Congrés Solvay —sota el lema «La teoria de la radiació i els quàntums»—, en el qual Einstein presenta les seves idees quàntiques sobre la calor específica dels sòlids cristal·lins.

▷ Refinant les seves idees de 1907, comença la recerca d'una teoria relativista de la gravitació.

▷ En la línia anterior, calcula el valor $0,83''$ (la meitat del valor correcte) per a la deflexió d'un raig de llum en passar

a prop del Sol, sense que influeixi la freqüència. A començament del segle XIX Soldner havia predit el valor $0,84''$, per aplicació directa de la teoria newtoniana de la llum, sense que influís la massa de les partícules lluminoses.¹

1912 És nomenat professor de l'ETH, a Zuric, on havia acabat els primers estudis universitaris el 1900.

Els anys a Berlín

1913 A final d'any accepta una càtedra —sense obligacions docents— a la Universität Berlin, així com la futura direcció de l'institut d'investigació de la Kaiser Wilhelm Gesellschaft, que llavors encara és només un projecte.

1914 Acabat d'arribar a Berlín —amb l'esposa i els fills— se separa de Mileva Marič, que torna a Zuric amb els fills. Poc després —l'1 d'agost— comença la Primera Guerra Mundial. ▷ Possiblement la primera manifestació política pública d'Einstein: s'adhereix al «Manifest als europeus», escrit per George Nicolai,² com a reacció al «Manifest dels 93», en el qual intel·lectuals prestigiosos justificaven els excessos militaristes alemanys, entre d'altres.

1915 A final d'any presenta diverses ponències davant la Preussische Akademie der Wissenschaften en les quals formula la seva teoria de la relativitat general. ▷ Amb la nova teoria corregeix el valor de 1911 per a la deflexió de la llum a prop del Sol: el nou valor —comprovat el 1919 i més tard— és d' $1,7''$.

¹El treball de Soldner no va ser conegut per Einstein —ni per pràcticament cap dels implicats en el tema— fins al 1921 (PAIS (1984), 208). El de Soldner tampoc era estrictament newtonià (MERLEAU-PONTY (1994), 252).

²El manifest preconitzava la unió entre els que «estimen veritablement la cultura europea». D'aquí el seu nom.

1916 En un llarg article que apareix als *Annalen der Physik*, presenta de manera rigorosa la formulació de la relativitat general.

▷ En un article molt reeditat introdueix l'estadística en tres processos elementals de la radiació electromagnètica: l'absorció, l'emissió espontània i l'emissió induïda.

En el mateix treball dedueix l'existència del fotó com a constituent elemental de la radiació.

1917 La seva salut es ressent de diverses malalties digestives de les quals tarda tres anys a recuperar-se plenament.

▷ Escriu el seu primer treball sobre cosmologia relativista. Introdueix la constant cosmològica —«el més gran error de meua vida»— a la qual no renuncia fins al 1931.

▷ Apareix la primera edició de la seva *Teoria de la relativitat especial i general*, potser el seu llibre més traduït i divulgat.

▷ Estableix una nova regla de quantificació que, tot i que tindrà una repercussió escassa, té un paper important en la tesi de Louis de Broglie (1924).

1919 Es divorcia de Mileva Marič. Uns mesos després es casa amb la seva cosina Elsa Einstein, divorciada també i amb dues filles —Ilse i Margot— que passen a viure amb el nou matrimoni.

▷ Les dades obtingudes durant l'eclipsi de sol del 19 de maig per dues expedicions d'astrònoms britànics —a l'illa Príncep, a Àfrica, i a Sobral, al Brasil— sembla que confirmen les prediccions d'Einstein de 1915 sobre la desviació dels raigs de llum per efecte de la gravetat solar.

▷ La gran difusió d'aquest èxit comença a consolidar la fama universal que Einstein adquirirà fins a convertir-se en un mite.

1920 Primeres mostres d'hostilitat cap a la persona d'Einstein i cap a la seva teoria de la relativitat per part d'antisemites.

- 1921** Primera visita als EUA (Chicago, Boston i Princeton) com a convidat a fer conferències sobre la teoria de la relativitat. L'hi acompanya Chaim Weizmann —que serà primer president d'Israel—, amb la idea d'intentar obtenir fons per a la futura universitat hebrea de Jerusalem.
- 1922** Mentre és al Japó, li concedeixen el Premi Nobel de Física de 1921 «pels seus serveis a la física teòrica i especialment pel seu descobriment de la llei de l'efecte fotoelèctric».
- ▷ Primer treball sobre la teoria del camp unificat.
- 1923** Tornant del Japó visita Palestina i Espanya.
- ▷ El descobriment i l'explicació de l'efecte Compton semblen confirmar el seu concepte de fotó i la seva teoria de la relativitat especial, simultàniament.
- 1924** Accepta la ciutadania alemanya —inherent als seus nomenaments administratius— sense renunciar a la ciutadania suïssa.
- ▷ El centre batejat amb el nom de Torre Einstein —a Potsdam, a prop de Berlín— comença les activitats científiques. Amb finançament privat, té com a objectiu essencial la investigació de les propietats de la llum que ens arriba de les estrelles després de travessar diferents camps gravitatoris.
- ▷ Última aportació constructiva d'Einstein a la física teòrica: la teoria quàntica dels gasos ideals (2a part el 1925), que aplica a la matèria un mètode llavors recent, establert pel físic bengalí S. Bose, per a la radiació. Aquesta nova teoria té una gran influència en la formulació de la mecànica ondulatòria d'E. Schrödinger (1926); a més prediu, entre altres resultats, el fenomen conegut després com a *condensació de Bose-Einstein*.
- 1925** Viatja a Amèrica del Sud (Buenos Aires, Rio de Janeiro i Montevideo) convidat a fer conferències sobre relativitat.

▷ Firma un manifest internacional —conjuntament amb Gandhi, entre d'altres— contra el servei militar obligatori.

1927 En el Cinquè Congrés Solvay, que té lloc sota el lema «Electrons i fotons», es produeix el primer episodi del llarg debat —per alguns encara avui pendent de solució— sobre els fonaments de la llavors recentment apareguda mecànica quàntica (formulació matricial de Heisenberg, 1925; formulació ondulatoria de Schrödinger, 1926).

1928 Problemes cardíacs (dilatació del cor) el retenen quatre mesos al llit.

1929 Famos intent fallit d'unificar les teories del camp gravitatori i del camp electromagnètic.

1930 Segona visita als EUA, especialment al California Institute of Technology (Caltech), a Pasadena. El viatge inclou una curta estada a Cuba.

1931 Tercera visita als EUA, també principalment al Caltech.

1932 Al desembre, Einstein i la seva esposa Elsa tornen als EUA, però ara amb la idea d'acceptar l'oferta de fer compatible el treball a Berlín amb l'exercici d'una càtedra a Princeton. Einstein ja no tornarà a trepitjar mai més terres alemanyes.

Els anys a Princeton

1933 Els nazis —ja amb Adolf Hitler al poder des del gener— registren la petita residència d'Einstein a Caputh, a prop de Berlín, amb la pretensió de trobar-hi armes amagades pels comunistes.

▷ Einstein dimiteix de la Preussische Akademie der Wissenschaften i de la Bayerische Akademie der Wissenschaften.

▷ Efectua la seva última visita a Europa: Suïssa —on veu, a Zuric, el seu fill Eduard per darrera vegada—, Bèlgica —sota la protecció de la família reial— i Anglaterra.

1935 Apareix publicat l'article «Pot considerar-se completa la descripció mecanicoquàntica de la realitat física?» que conté la que s'ha anomenat *paradoxa EPR* (autors: Einstein, Podolsky i Rosen). Es tracta d'un treball que va impulsar el debat al voltant de la interpretació del formalisme de la mecànica quàntica.

1936 Mor a Princeton la seva segona esposa, Elsa Einstein.

1937 Publica conjuntament amb N. Rosen un article sobre ones gravitatòries, que és objecte de controvèrsies historiogràfiques.

1939 Firma la seva primera carta dirigida al president F. D. Roosevelt, en què recomana la col·laboració entre científics i militars per investigar en armament nuclear.

1940 Obté la nacionalitat dels EUA i continua mantenint la suïssa.

1943 Firma un contracte —rebrà 25 dòlars diaris— com a assessor de la Marina dels EUA, concretament de la secció Municció i Explosius.

1944 Reescriu el seu manuscrit de 1905 sobre la teoria de la relativitat, per contribuir a l'obtenció de fons per a la guerra. Mitjançant unes subhastes a Kansas s'aconsegueix una aportació de sis milions de dòlars.

Els últims temps

1946 Envia una carta oberta a l'Assemblea General de les Nacions Unides en què preconitza la institucionalització d'un govern a escala mundial.

1948 Mor a Zuric la seva primera esposa, Mileva Marič.

▷ Li detecten un aneurisma inoperable a l'aorta abdominal.

▷ Continua publicant sobre les seves idees per generalitzar la teoria de camps.

1949 Apareix la seva autobiografia científica, inclosa en el llibre homenatge que li dediquen en el seu setanta aniversari, *Albert Einstein: philosopher-scientist*.

1950 Firma les seves últimes voluntats: Otto Nahan (economista i amic) i Helene Dukas (la seva secretària personal des de 1928) són nomenats administradors de la seva herència.

▷ Nomena l'Hebrew University of Jerusalem dipositària dels seus escrits personals i hereva de la seva propietat intel·lectual.

1952 Rebutja la presidència de l'Estat d'Israel, que li ofereixen a la mort del primer president Weizmann.

1954 Einstein i Bohr es veuen per última vegada a Princeton.

▷ Publica a la premsa una declaració de suport a J. R. Oppenheimer davant les dificultats d'aquest amb el govern dels EUA.

1955 El 15 de març mor el seu amic íntim Michele Besso.

▷ El 18 d'abril mor Albert Einstein a l'hospital de Princeton. El seu cos és incinerat i les seves cendres, dispersades en algun lloc no revelat.

▷ Una setmana abans de la seva mort, Einstein havia escrit a Bertrand Russell per comunicar-li la seva disposició a firmar un manifest —redactat per aquest— en favor de la renúncia universal a l'armament nuclear.

1 Un jove agosarat i feliç

El febrer de 1902 Albert Einstein (1879–1955) s'instal·là a Berna. A l'Oficina Suïssa de Patents d'aquesta ciutat obtingué el juny del mateix any una còmoda i desitjada feina com a pèrit tècnic de tercera classe. Poc després, a primers de gener de 1903, es casà amb Mileva Marič (1875–1948), que havia estat companya seva d'estudis universitaris a la prestigiosa Eidgenössische Polytechnische Schule de Zuric, més coneguda amb les sigles ETH.¹ Tot eren bones perspectives. En una carta a Michele Besso (1873–1955), datada pocs dies després del casament, Einstein escrigué:

«Ara sóc un home casat i porto una vida molt agradable amb la meva esposa. Ella s'ocupa perfectament de tot, cuina bé i sempre està alegre.»

Va ser el primer dels dos fills de Hermann Einstein (1847–1902) i Pauline Koch (1858–1920). La seva germana Maria Einstein (1881–1951) —a qui afectuosament anomenava Maja— sempre va estar molt lligada a ell i, el 1924, en va escriure una petita biografia amb una gran quantitat de dades familiars de la qual sovint s'extreuen bona part de les notes biogràfiques sobre la joventut d'Einstein. Albert va néixer a Ulm, al sud d'Alemanya, en el si d'una família que el va instruir en els principis del judaisme de manera força liberal. Va cursar els primers estudis a Munic i rebé una educació religiosa —primer catòlica i més tard judaica— en una escola pública, com prescrivia la llei bavaresa. A la tardor de 1894 —quan encara li quedaven tres cursos per acabar l'ensenyament secundari— va abandonar l'escola de Munic i va marxar a Milà per reunir-se amb els seus pares, que s'hi havien traslladat per motius de feina. Havia decidit preparar pel seu compte els exàmens d'admissió a l'ETH.

Un any després —l'octubre de 1895— Einstein viatjà a Zuric per fer les proves d'ingrés a l'ETH (no el podien admetre direc-

¹Corresponen al nom adoptat pel centre el 1911: Eidgenössische Technische Hochschule.

tament perquè no havia obtingut el diploma d'estudis secundaris ni havia complert els 18 anys). Tot i la seva actuació notable en matemàtiques i en física, els resultats en la resta de matèries no van ser prou bons per aconseguir l'accés directe; va haver, doncs, de matricular-se a l'escola cantonal d'Aargau —a Aarau, Suïssa— i cursar els ensenyaments que li faltaven per obtenir el diploma de *Matura*, que s'atorgava en finalitzar els estudis secundaris. En qualsevol cas, la llegenda que Einstein va ser inicialment un alumne amb un rendiment acadèmic escàs manca de qualsevol fonament.

L'octubre de 1896 va ser admès a l'ETH per cursar el cicle de quatre anys que facultava essencialment per a la docència en matemàtiques i en física a l'ensenyament secundari, raó per la qual Einstein va fixar la residència a Zuric. Començava una etapa important de la seva vida. No només en relació amb la seva eterna adhesió als costums i la manera de ser del poble suís, sinó perquè es trobaria amb tres personatges que exercirien —en un moment o altre— una influència decisiva en el transcurs de la seva vida: els seus companys d'estudis Marcel Grossmann (1878-1936), Mileva Marič (1875-1948) i Michele A. Besso, un enginyer suís que va ser el seu amic i confident més fidel durant la resta de la seva vida.

Poc se'n sap encara avui de Mileva Marič. Era quatre anys més gran que Einstein. Filla d'un alt funcionari hongarès, nascuda a Titel —llavors al sud d'Hongria, avui a Sèrbia—, durant l'adolescència havia adquirit una formació prou alta per poder cursar estudis a la prestigiosa ETH, on era l'única dona del seu curs. Allà aviat es va establir una intensa relació sentimental entre Einstein i Marič. Albert va obtenir el títol de l'ETH el 1900, amb qualificacions ajustades: les més baixes dels quatre aprovats. Dels onze estudiants que havien començat només cinc van arribar a presentar-se a les proves finals, i d'aquests només va suspendre Mileva. Tot i això, les seves qualificacions van ser molt similars. Només en Teoria de Funcions van ser completament diferents: 11 sobre 12 per a ell i 5 sobre 12 per a ella, cosa que va causar el suspens de la jove. Marič ho va intentar de nou —un any després— i va tornar

a suspendre, malgrat l'ajuda d'Einstein.

Els altres tres companys que van obtenir el diploma amb Einstein —tots ells amb qualificacions més altes que les seves— es van quedar a l'ETH com a ajudants. Ell no va poder, tot i que ho desitjava i ho va intentar amb totes les seves forces. Va culpar del seu fracàs directament el seu professor Heinrich Friedrich Weber (1843–1912), director del seu treball final de diplomatura i del seu primer projecte de tesi doctoral; a més d'acusar-lo en privat de certa animadversió personal, el considerava un científic incompetent, per no estar al dia dels últims desenvolupaments de la física. Contràriament, en altres ocasions es va referir en to altament elogiós a altres professors de l'ETH com, per exemple, Hermann Minkowski (1864–1909).

Einstein va intentar obtenir un lloc de treball en centres universitaris. Entre d'altres, ho va intentar amb Friedrich Wilhelm Ostwald (1853–1932), de Leipzig, fisicoquímic famós per les seves aportacions a la catàlisi.² I també amb Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926), de Leiden, reconegut especialista en baixes temperatures.³ En cap cas Einstein va ser el candidat escollit. Per poder subsistir —la petita ajuda econòmica que rebia encara dels seus pares resultava insuficient— va recórrer a les substitucions i a altres treballs temporals a l'ensenyament secundari, fins que els bons oficis del pare del seu company Grossman li van obrir les portes de l'Oficina Suïssa de Patents. Hi va ingressar el juny de 1902 i es va quedar a Berna durant set anys, fins que es va traslladar com a professor extraordinari a la Universität Zürich, el 1909.

Els mesos que van transcórrer entre la finalització del seus estudis a l'ETH de Zuric i el trasllat a Berna no van ser temps perdut per a Einstein pel que fa a la seva activitat científica. Al final de

²Premi Nobel de Química de 1909 «en reconeixença del seu treball sobre catàlisi i per les seves investigacions sobre els principis fonamentals que governen els equilibris químics i les velocitats de reacció».

³Premi Nobel de Física de 1913 «per les seves investigacions sobre les propietats de la matèria a baixes temperatures, que el van conduir, entre altres coses, a la producció d'heli líquid».

1900 —cinc mesos després de graduar-se— va enviar a la prestigiosa revista *Annalen der Physik* el seu primer treball científic, que va aparèixer publicat el març de 1901 amb el títol «Conclusions a partir dels fenòmens de capil·laritat».⁴ Einstein en va presentar una versió ampliada com a tesi doctoral a la fi d'aquell mateix any a la Universität de Zürich, de la qual va ser supervisor el professor Alfred Kleiner (1849–1916), especialista en electricitat d'aquella universitat. Consta que la tesi va ser retirada setmanes després, previsiblement pel mateix Einstein, davant l'opinió negativa dels encarregats de fer l'informe preceptiu.

Poc abans de viatjar a Berna, Einstein va rebre una carta de Marič des de casa els seus pares, a la Sèrbia actual, en què l'informava del naixement de Lieserl, una filla de tots dos de la qual fins fa poc no es coneixia l'existència i que, en vista de la manca total d'informació posterior al seu naixement, devia morir molt aviat o ser donada en adopció davant les dificultats previsibles d'una mare soltera de l'època.

El seu segon treball, en la mateixa línia de l'anterior, no es va fer esperar. Es va rebre, també als *Annalen*, a la primavera de 1902, quan Einstein ja estava instal·lat a Berna, i va aparèixer publicat al mes de juliol amb el títol «Sobre la termodinàmica de la diferència de potencial entre metalls i solucions completament dissociades de les seves sals i sobre un mètode elèctric per a la investigació de les forces moleculars».⁵ Tots dos treballs perseguïen bàsicament el mateix objectiu: el descobriment de les característiques de les forces intermoleculars mitjançant l'anàlisi dels seus efectes en certs comportaments dels líquids. El 1901, el fenomen a considerar era la capil·laritat i, el 1902, algunes propietats elèctriques dels metalls en solucions.

Malgrat la forta oposició familiar, feia temps que en els plans d'Einstein figurava contreure matrimoni amb Marič tan aviat com obtingués la mínima independència econòmica. La seva feina re-

⁴EINSTEIN (1901).

⁵EINSTEIN (1902a).

cent a l'Oficina de Patents i, potser, la mort del seu pare a Milà en aquells dies, li van facilitar d'acomplir el seu propòsit. El casament es va celebrar a principi de 1903. Quedaven lluny en la seva memòria, però no en el temps, els monòtons anys escolars, els freqüents canvis de domicili, la recerca d'una feina digna i les discussions altisonants amb els pares, especialment amb la seva mare, davant l'interès opressiu que mostraven per evitar el casament amb Mileva a qualsevol preu.

Era d'esperar que, un cop casat i amb feina estable, les tensions afluessin. No hauria de sentir més comentaris desagradables sobre la que ja era la seva dona, els interessos intel·lectuals de la qual certament no s'ajustaven al model tradicional que els seus pares creien que era el més adequat per fer feliç el seu fill. A l'estiu de 1900, Albert escrivia en una carta dirigida a Mileva una part del diàleg que el jove havia mantingut amb la seva mare en comunicar-li que la seva futura nora no havia aconseguit aprovar l'examen final de l'ETH:⁶

«En primer lloc li explico [Einstein es refereix a la seva mare] això de l'examen, llavors ella em pregunta amb aire innocent: "Així, què en farem de Dockerl [Nina, apel·latiu afectuós que Einstein dedicava a Mileva]?" "La meva dona", li contesto també innocentment, preparat, però, per a una veritable "escena". Aquesta es va produir immediatament. La mare es va llançar sobre el llit, va enterrar el cap sota el coixí i va cridar com una criatura. Després de recuperar-se de l'impacte inicial, va passar ràpidament a una ofensiva desesperada: "Estàs arruïnant el teu futur i bloquejant-te camins a la vida", "aquesta dona no pot entrar en una família decent", "si té un fill, et veuràs embolicat en problemes"... , "ella és un llibre, com tu, però el que tu

⁶Carta d'A. Einstein a M. Marič, 29 (?) de juliol de 1900. Traducció anglesa a BECK (1989), 142-143.

necessites és una esposa”, “quan tu tinguis trenta anys, ella serà una vella bruixa”, etc.»

Ara tot seria diferent. No hauria de suportar més impropèrits com els anteriors. Per si no fos prou, el 1901 —abans de traslladar-se a Berna— l’havien declarat exempt del servei militar per problemes físics —peus plans, varius i excessiva sudoració— i aquell mateix any se li havia concedit la nacionalitat suïssa, que ja no va perdre mai a pesar de tots els avatars de la seva vida. Van acabar així els cinc anys que es va mantenir com a apàtrida des que va renunciar, el 1896, a la nacionalitat alemanya de naixement.

Poc després de casar-se va trobar-se a Berna amb Maurice Solovine (1875–1958), un jove filòsof romanès àvid d’idees sobre la física del moment —al qual després es va referir de vegades com al «bo d’en Solo»—, i amb Conrad Habicht (1876–1958), un amic de Zuric que venia a ampliar els estudis de matemàtiques. Einstein es va erigir en líder de la terna que amb gran pompa van batejar com a Acadèmia Olímpia. Es reunien de manera regular, encara que informal, per discutir de filosofia, física i literatura. Tot i que l’Acadèmia es va dissoldre tres anys després, per la separació física dels seus membres, no es va esvair mai del record d’Einstein. Mig segle després, en una carta dirigida a M. Solovine, Einstein rememorava les discussions i les lectures que hi havien tingut lloc —Sòcrates, Plató, Spinoza, Hume, Mach, Poincaré, Racine i Cervantes, entre d’altres— i es referia a

«la nostra feliç “Acadèmia”, que malgrat tot era menys infantil que les respectables que després vaig arribar a conèixer més de prop».⁷

Els seus dos treballs sobre la natura de les forces moleculars no van tenir gaire impacte, tot i que el mateix Einstein es va encarregar d’enviar separates a alguns dels líders del moment; en

⁷ Carta d’A. Einstein a M. Solovine, 25 de novembre de 1948; citada a PAIS (1984), 61.

particular a aquells a qui s'havia adreçat per sol·licitar una plaça acadèmica. Però Einstein tampoc degué valorar-los gaire positivament. En alguna ocasió posterior s'hi va referir en to gairebé despectiu, considerant-los senzillament com els dos primers treballs d'un debutant sense experiència en un camp realment complicat. Tampoc n'apareix cap menció en les referències autobiogràfiques que Einstein dedica als seus primers passos en el camp de la investigació.

No passa el mateix amb els treballs immediatament posteriors. Entre setembre de 1902 i juny de 1904, amb Einstein ja establert a Berna, veuen la llum a través dels *Annalen* tres articles seus dedicats a presentar una formulació pròpia de la mecànica estadística clàssica de l'equilibri.⁸ Encara que amb clara originalitat, segueix la línia tradicional de la teoria cinètica de Ludwig Boltzmann (1844–1906), completament diferent de la que el físic nord-americà J. W. Gibbs (1839–1903) acabava de presentar en el seu llibre *Elementary principles in statistical mechanics*, de 1902; llibre que, segurament, Einstein no va arribar a conèixer fins el 1905, en aparèixer la traducció a l'alemany.

L'objectiu bàsic dels treballs que componen la trilogia anterior es pot resumir d'aquesta manera: obtenir les lleis de la termodinàmica, en especial el segon principi, partint de la hipotètica constitució molecular de la matèria, suposant que les molècules es comporten d'acord amb la mecànica newtoniana i utilitzant la descripció probabilística dels estats termodinàmics introduïda per Boltzmann. Tot i que la repercussió d'aquests treballs en aquell moment va ser mínima, haurem de tornar-hi més endavant.

L'últim article d'aquesta trilogia, aparegut el juny de 1904 amb el títol «Sobre la teoria molecular general de la calor», mostra un estil molt més depurat que els anteriors i una gran profunditat en el tractament compatible amb la senzillesa de l'exposició. Dificilment es podia endevinar que l'autor és un jove de 25 anys, distanciat en aquell moment del món acadèmic. És un treball d'anàlisi impres-

⁸ EINSTEIN (1902b), EINSTEIN (1903) i EINSTEIN (1904).

cindible si es té interès en l'evolució del pensament científic del nostre personatge.

En aquest article apareixen les motivacions que van portar Einstein a un camp fins llavors fora dels seus interessos científics: la radiació del cos negre. És el primer cop que s'entreu una relació entre el món de la física estadística —fins aleshores el preferit d'Einstein— i el de la física quàntica, a punt de començar a absorbir bona part de les seves energies. Aquesta relació resultarà essencial per comprendre el desenvolupament de les idees d'Einstein en aquests camps durant, almenys, els vint anys següents.

Mitjançant la seva autobiografia, les cartes escrites a la seva promesa Mileva durant l'etapa de prometatge en què van viure en ciutats diferents i la documentació inclosa en els *Collected Papers*, és possible fer-se una idea ajustada dels interessos científics d'Einstein i de la seva formació acadèmica en aquell moment, adquirida essencialment mitjançant lectures directes. Per exemple, consta que posseïa un alt grau d'assimilació de la teoria del camp electromagnètic de James Clerk Maxwell (1833–1879), amb les aplicacions i les dificultats corresponents. Coneixia les principals aportacions de Hermann von Helmholtz (1821–1894), Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) i Heinrich Rudolph Hertz (1857–1894) a la física del moment en general i a l'electromagnetisme en particular. I estava profundament impressionat per les idees contingudes en el llibre que Ernst Mach (1838–1916) havia dedicat al desenvolupament historicocrític de la mecànica.

També havia seguit els primers intents de Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) per formular una teoria sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment.⁹ I era un bon coneixedor, i admirador, de Boltzmann; especialment de les seves idees sobre la concepció estadística de la segona llei de la termodinàmica, així com de la seva teoria cinètica dels gasos. En certs moments es va interessar

⁹Premi Nobel de Física de 1902 —compartit amb Peter Zeeman—, «en reconeixença de l'extraordinari servei prestat per les seves investigacions sobre la influència del magnetisme sobre els fenòmens de la radiació».

pels treballs experimentals de Philipp E. A. von Lenard (1862–1947) sobre la producció de raigs catòdics per llum ultraviolada, cosa que després es va anomenar *efecte fotoelèctric*.¹⁰ Coneixia els estudis de Wilhelm Wien (1864–1928) sobre la termodinàmica de la radiació¹¹ i, òbviament, estava assabentat de les últimes idees de Max Planck (1858–1947) sobre les propietats de la radiació del cos negre.¹²

A pesar d'una formació tant exquisida i completa en física teòrica, Einstein semblava partir d'una posició en principi desfavorable. La seva escassa relació amb el món acadèmic després de finalitzar els seus estudis a l'ETH podia representar un factor negatiu a l'hora d'afrontar problemes de més envergadura. Però també podia ser cert el contrari: la gosadia de la seva joventut i la manca de lligams amb les autoritats que havien de donar alguna mena de beneplàcit al seu treball, potser van fer més fàcil que la intel·ligència i la imaginació es desenvolupessin amb plenitud. Tampoc hem de deixar de banda els beneficis —reconeguts més tard pel mateix Einstein— que reportava a la seva formació la feina que feia com a analista consciencios i rigorós de les sol·licituds de patents, cosa que l'obligava a relacionar-se permanentment amb el món de les invencions i l'experimentació.

En qualsevol cas, havia aconseguit una estabilitat laboral i afectiva que perseguia des del final dels seus estudis a l'ETH. Els cinc treballs anteriors als *Annalen* l'havien familiaritzat amb la manera de redactar els resultats de les seves investigacions. Era el moment adequat. A més d'examinar patents, ara podria abordar l'anàlisi profunda de certes qüestions importants de física que el preocupaven des de feia temps i sobre les quals tenia algunes idees. Per exemple, des de molt petit l'havia seduït el misteri que amaga el comportament d'una brúixola, sempre obligada a mirar cap al

¹⁰Premi Nobel de Física de 1905 «pel seu treball sobre els raigs catòdics».

¹¹Premi Nobel de Física de 1911 «pels seus descobriments en relació amb les lleis que governen la radiació de calor».

¹²Premi Nobel de Física de 1918 «en reconeixença dels serveis que va prestar a l'avenç de la física pel seu descobriment dels quàntums d'energia».

nord guiada per una força misteriosa. I més endavant, quan estava a punt de començar els estudis universitaris, es plantejava amb freqüència situacions una mica enigmàtiques que la majoria de vegades acabaven conduint-lo a la necessitat de desvelar l'autèntica natura de la llum. Per exemple, un d'aquests pensaments recurrents consistia a imaginar-se què passaria si fos possible cavalcar sobre un raig de llum: què es veuria, si és que es veia alguna cosa? O potser aquesta qüestió no estava del tot ben plantejada?

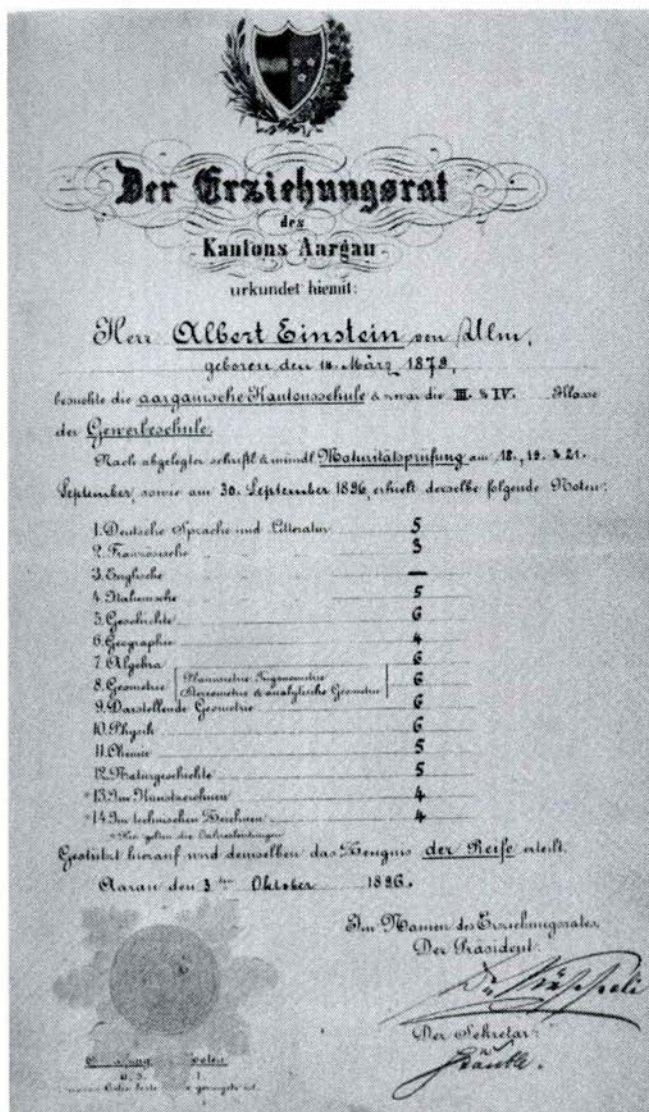


Figura 1: Certificat de notes finals de l'ensenyament secundari de l'escola cantonal d'Aargau



Figura 2: Einstein, assegut a l'esquerra, amb altres membres del darrer curs de l'ensenyament secundari de l'escola cantonal d'Aargau



Figura 3: Mileva Marić, c. 1896



Figura 4: Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) de Zuric cap al 1890



Figura 5: M. Marič i A. Einstein cap al 1905



Figura 6: Casa d'Einstein a Berna (reconstrucció).



Figura 7: Einstein a l'Oficina Suïssa de Patents de Berna el 1905

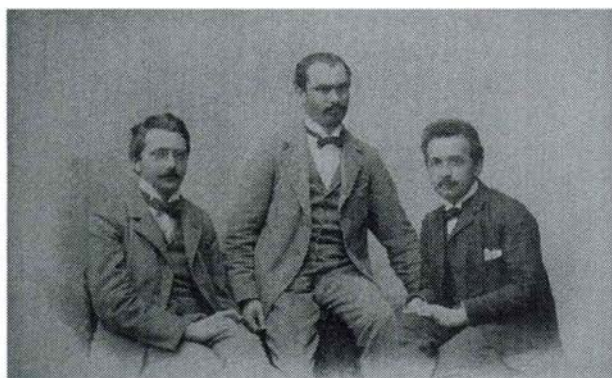


Figura 8: L'Acadèmia Olímpia: C. Habicht, M. Solovine i A. Einstein (d'esquerra a dreta)



Figura 9: M. Marič i A. Einstein amb el seu primer fill Hans Albert, el 1904

ANNALEN
DER
P H Y S I K.

HERAUSGEBET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. FOCKENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTHE FOLGE.

BAND 17.

DES GANZEN REICHES 222. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND UNTERSTÜTZUNG VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1905.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

Figura 10: Portada del famós volum 17 dels *Annalen der Physik*

2 Quàntums d'energia, efecte fotoelèctric i més coses¹

2.1 Antecedents

A partir de la documentació existent, concretament de les cartes escrites a la seva promesa Mileva Marič, es pot afirmar que Einstein coneixia les idees de Kirchhoff sobre la radiació tèrmica; com a mínim a través dels dos capítols que hi dedicava el llavors conegut llibre de Mach *Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt*, de 1896. En particular sabia que l'energia emesa pel cos negre (que absorbeix tota la radiació incident) en equilibri a una certa temperatura (ha d'emetre tota l'energia que absorbeix), és una funció universal de la temperatura absoluta i de la longitud d'ona considerada. D'aquesta manera, el material concret de què està format el cos negre, no té cap influència en la quantitat ni en les propietats de l'energia emesa (o absorbida).

Einstein coneixia els principals intents de trobar aquesta funció universal. Weber —el seu tan poc apreciat professor de l'ETH— havia dedicat algunes classes a aquest tema; hi estava tan interessat que fins i tot ell mateix havia proposat un candidat per a aquesta funció. Einstein també sabia que la funció proposada per Wien el 1896 era la que millor s'ajustava a les dades experimentals existents al final del segle XIX, fins al punt de ser considerada com a definitiva en aquells dies en què el jove Einstein estava finalitzant els estudis superiors.

També coneixia les aportacions de Planck, que semblava llavors convençut que la radiació tèrmica podia constituir un sistema físic summament adequat per intentar trobar una explicació de la

¹Entre les fonts més àmpliament consultades per la redacció d'aquest apartat hem de destacar STACHEL (1989): «Editorial note: Einstein's early work on the quantum hypothesis», 134–148. En no poques ocasions hem recorregut al capítol 19 de PAIS (1984) i també a investigacions pròpies, com ara les incloses al capítol II de NAVARRO (1992). En el text se citen altres fonts més específiques si escau.

irreversibilitat dels sistemes termodinàmics, sense necessitat de recórrer a elements estadístics com els introduïts per Boltzmann. La descripció estadística li desagradava profundament —des del punt de vista metodològic, s'entén— com a candidat a tenir un paper tan insigne pel que es refereix a la fonamentació mecànica de la termodinàmica. Entre 1897 i 1900 Planck havia dedicat diferents treballs a tractar d'aclarir aquests temes.

Com que, segons havia establert Kirchhoff, en la interacció entre radiació i matèria la natura concreta d'aquesta era irrelevant i només comptava la temperatura, Planck va idear un model relativament senzill de tractar: la radiació interaccionava amb un conjunt de ressonadors —oscil·ladors harmònics carregats elèctricament— i el sistema es trobava en equilibri tèrmic a una certa temperatura T . Però aviat es va adonar que no arribava gaire lluny amb el seu model si no hi introduïa alguns aspectes estadístics, com ara els de Boltzmann.

Per exemple, Planck va introduir la noció de *radiació natural* com un estat de màxim desordre electromagnètic —un concepte que aviat va cridar l'atenció d'Einstein—, de manera anàloga a la idea de *caos molecular*, com un estat de màxim desordre de les partícules d'un gas. Sempre amb l'ajuda de l'electromagnetisme maxwellià, va obtenir una fórmula, que va resistir admirablement el pas del temps, per relacionar la distribució espectral de la densitat d'energia de la radiació $\rho(\nu, T)$ (energia per unitat de volum i per unitat d'interval de freqüència) amb l'energia mitjana per oscil·lador $\bar{E}(\nu, T)$ d'un conjunt de ressonadors monocromàtics de freqüència ν :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}(\nu, T), \quad (1)$$

on c representa la velocitat de la llum en el buit.

L'expressió anterior, conjuntament amb el recurs als mètodes estadístics de Boltzmann i alguna hipòtesi addicional sobre el comportament dels ressonadors, permetia deduir la fórmula de Wien per a la radiació, que era la que millor explicava els resultats ex-

perimentals del moment. Ara és el moment d'introduir una curta digressió. El laboratori d'òptica del Physikalisch-Technische Reichsanstalt (Institut Imperial Fisicotècnic), a Berlín, era un dels més ben equipats del moment, en el seu àmbit. S'hi investigava especialment en fotometria; en particular, hi havia diferents grups de treball dedicats a la recerca de materials adequats per intentar obtenir un patró de mesura per a la intensitat lluminosa que permetés la implantació d'una unitat internacionalment acceptada. Amb aquesta finalitat, la radiació emesa per un cos negre era objecte de nombroses mesures i estudis, tant per la facilitat per reproduir el cos emissor com pel caràcter universal de la seva forma d'emetre radiació.

Un d'aquests grups de treball estava integrat per Otto Lummer (1860–1925), director del laboratori, i Ernst Pringsheim (1859–1917), que van refinar les tècniques fotomètriques usuals fins a arribar a mesurar per primera vegada en la zona de l'infraroig corresponent a longituds d'ona al voltant de les 15 micres, dins un ampli rang de temperatures. Els seus resultats de començament de 1900 mostren una clara divergència amb els resultats subministrats per la llei de Wien en aquesta zona, cosa que no era la primera vegada que succeïa.

Un altre grup del mateix laboratori el formaven Heinrich Rubens (1865–1922), amic personal de Planck a Berlín i Ferdinand Kurlbaum (1857–1927). Encara van refinar més les tècniques de mesura dels seus companys fins al punt que, a finals d'octubre d'aquell mateix any, van presentar resultats per a longituds d'ona d'entre 30 i 60 micres, que corresponen a un infraroig més profund, i per a temperatures entre 200 i 1500°C. Aquestes mesures confirmaven i ampliaven els desajustos prèviament detectats en relació amb la fórmula de Wien. Uns quinze dies abans de ser públicament presentats els resultats davant la Berlin Akademie der Wissenschaften, Planck ja n'havia estat informat per Rubens. I és aquí on reprenem el fil dels intents de Planck per explicar el comportament de la radiació tèrmica.

Després d'haver estat informat de la divergència de les noves dades amb la fórmula de Wien, Planck va trobar aviat una modificació aparentment simple d'aquesta fórmula que ara semblava ajustar-se perfectament a les noves dades, fet que li va confirmar immediatament Rubens mateix després de les comprovacions oportunes. Tot va succeir en pocs dies del mes d'octubre de 1900. Així va ser com, el 19 del mateix mes —una setmana abans que Rubens i Kurlbaum fessin públics els seus resultats!—, Planck va presentar Deutsche Physikalische Gesellschaft davant la seva nova fórmula per a la distribució espectral del cos negre:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (2)$$

on k representa la constant de Boltzmann —que, en aquells temps, s'escribia senzillament com el quocient entre la constant universal dels gasos R i el nombre d'Avogadro N — i h representa una nova constant universal, després coneguda com a constant de Planck.² Tot i que és cert que formalment aquesta expressió només es diferencia de l'anterior fórmula de Wien pel «-1» del denominador, no estem en condicions d'avaluar amb rigor l'esforç mental de Planck per deduir-la.

Un cop trobada l'expressió (2), tots els esforços de Planck es van dirigir cap a trobar-ne una justificació teòrica, «costés el que costés». El procediment escollit passava per determinar l'entropia mitjana per ressonador $\bar{S}(\nu, E)$ per a un conjunt de ressonadors monocromàtics de freqüència ν i energia total E i introduir la temperatura absoluta mitjançant la relació termodinàmica:³

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial \bar{S}(\nu, E)}{\partial \bar{E}(\nu, T)}. \quad (3)$$

²Per facilitar-ne la lectura, emprarem aquí una notació actualitzada.

³És la manera usual d'introduir la temperatura absoluta quan es planteja inicialment el problema en la collectivitat microcanònica, que és l'adequada per descriure un sistema amb energia total donada.

En arribar a aquest punt resulta obligat fer referència a l'«acte de desesperació» que va suposar per a Planck adoptar el mètode estadístic de Boltzmann per calcular l'entropia mitjana per ressonador $\bar{S}$, que, substituïda en (3), permetia trobar l'energia mitjana per ressonador $\bar{E}$, que, a la vegada i mitjançant la (1), donava la fórmula de Planck (2). Sense entrar en els detalls d'aquest càlcul, n'hi ha prou d'assenyalar que Planck es va trobar amb una gran sorpresa: per obtenir realment la seva fórmula per a la radiació, l'energia de cada ressonador de freqüència ν no podia tenir un valor en principi arbitrari, com es podria esperar, sinó que només podia valer un múltiple sencer de la quantitat $\epsilon = h\nu$. Havia nascut el *quàntum* d'energia per a la radiació com una estranya propietat dels ressonadors de Planck, condició suficient per obtenir la seva llei de radiació.

Tot i que Einstein estava al corrent d'aquesta situació, els seus primers interessos científics no seguien aquesta direcció. Ja hem comentat que, entre 1902 i 1904, Einstein va publicar tres articles on presentava una formulació original de la mecànica estadística de l'equilibri. És en el darrer treball de la trilogia que, després de calcular el valor de la fluctuació de l'energia en una situació d'equilibri tèrmic, Einstein s'interroga sobre la possibilitat de trobar un sistema adequat per contrastar els seus resultats amb els experiments. Un raonament subtil —amb el qual justifica certa relació entre aquestes fluctuacions i la llei del desplaçament— el porta a la conclusió que el sistema cercat podria ser ben bé la radiació del cos negre.

En resum: Einstein, al corrent de les investigacions de Planck sobre la radiació del cos negre, dirigeix la seva atenció cap a aquest camp, no pel seu interès exprés a ocupar-se directament d'aquest tema, sinó perquè creu que és un terreny propici per assajar alguns aspectes problemàtics dels seus mètodes estadístics i poder demostrar la potència de la seva formulació. Tot i que més endavant haurem de tornar a referir-nos al tema, anticipem que no hem trobat la més mínima evidència que l'explicació de l'efecte fo-

toelèctric representés qualsevol tipus de motivació perquè Einstein s'interessés, cap el 1905, pels problemes de la radiació tèrmica.

2.2 Contingut de «Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de llum»⁴

És en aquest famós article de 1905 que Einstein bateja amb el nom de *principi de Boltzmann* —així es coneix des d'aquest moment— l'expressió que relaciona la probabilitat d'un estat i l'entropia:

$$S - S_0 = k \ln W, \quad (4)$$

on S_0 representa l'entropia d'un sistema termodinàmic en un cert estat; S , l'entropia en un altre estat arbitrari, i W la probabilitat relativa entre aquest i el primer. El principi de Boltzmann tenia en aquest treball un paper essencial i molt diferent del que, per exemple, li havia adjudicat Planck en les seves investigacions sobre la radiació.

L'article comença sotmetent a crítica el tractament anterior de Planck, que sembla no haver-se apartat al més mínim de la física clàssica, incloent-hi la teoria cinètica, en què l'expressió (4) i el principi d'equipartició de l'energia eren dos dels seus pilars fonamentals. Segons aquest principi —afirmava Einstein— l'equilibri tèrmic dels ressonadors planckians implicava que

$$\overline{E}(\nu, T) = kT, \quad (5)$$

Expressió que, substituïda a (1), no només no conduïa a la fórmula de Planck (2), sinó que portava a:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2. \quad (6)$$

Aquesta expressió, coneguda com a llei de Rayleigh-Jeans,⁵ era una bona aproximació per a «grans» longituds d'ona, però era

⁴EINSTEIN (1905a).

⁵Per a detalls mínims sobre les vicissituds d'aquesta fórmula, des dels seus primers passos el 1900 fins a la seva consolidació el 1905, podeu veure PAIS (1984), 377–379.

inadmissible com a solució vàlida per a tot l'espectre pel seu desajust amb les dades experimentals per a petites longituds d'ona i, sobretot, perquè conduïa al que uns anys després Paul Ehrenfest (1880–1933) va batejar com a *catàstrofe ultraviolada*: la fórmula (6) implicava una energia total infinita —que era el que s'obtenia en integrar (6) per a totes les freqüències—, cosa que resultava totalment inadmissible.

Per a Einstein, no era aquest l'únic problema del tractament de Planck. N'hi havia dos més de gran importància: d'una banda s'havia basat en un model sense garanties, en aquell moment —el dels ressonadors planckians— i, d'altra banda, havia utilitzat els mètodes de Boltzmann, en particular l'expressió (4), sense que la probabilitat W que hi apareix estigués clarament definida i sense que la seva utilització s'ajustés a les lleis ordinàries del càlcul de probabilitats. D'aquí ve l'interès d'Einstein per intentar comprovar si el resultat de Planck era realment una característica de la radiació; és a dir, si el quàntum era no només condició suficient, com havia demostrat Planck, sinó també una propietat necessària per entendre el comportament de la radiació.

El 1905 Einstein admet sense pal·liatius l'expressió (4), però no la interpretació original de Boltzmann, després adoptada per Planck, per al significat de W . Emprant les paraules de Planck, es pot afirmar que el principi de Boltzmann, en el fons, són dos principis. Einstein admet el primer —la relació entre entropia i probabilitat— però no troba arguments suficients per justificar la suposició addicional sobre la proporcionalitat entre la probabilitat i el nombre de complexions; aquest és, segons Einstein, un supòsit addicional injustificat i innecessari.

La proposta d'Einstein passava per introduir la idea de «probabilitat estadística» com una noció que, segons el seu parer, feia innecessari cap supòsit addicional sobre W . Considera —com un cas especial— un gas que inicialment ocupa un volum V_0 , amb n molècules, i que es troba en un estat al qual correspon l'entropia S_0 . No es fan hipòtesis sobre les lleis que governen el moviment

de les molècules; només s'admet que no hi ha regions ni direccions privilegiades en el volum ocupat pel gas i que els efectes d'unes molècules sobre les altres poden ser negligits; és a dir, que es tracta d'un gas ideal.

Si el gas pateix una transformació consistent a passar a ocupar un volum V , li correspondrà una nova entropia S , la relació de la qual amb S_0 vindrà donada per (4). Ara és quan Einstein introdueix la noció de «probabilitat estadística» en assignar a W el valor:

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^n, \quad (7)$$

expressió que —al seu entendre— resulta «evident». Fins aquí no apareix cap idea veritablement revolucionària en el tractament d'Einstein, el problema s'ha limitat al gas ideal de molècules.

És en ocupar-se de la radiació que Einstein comença a desplegar la seva creativitat. No només perquè es tracta d'un tema vedat als mètodes estadístics, segons les opinions de Boltzmann i Gibbs,⁶ sinó per la seva originalitat a l'hora de trobar recursos adequats per poder aplicar la mecànica estadística —concretament el principi de Boltzmann— a la radiació sense recórrer a un model mecànic per a aquesta última (p. ex., els ressonadors planckians). Per això resultava imprescindible trobar i justificar la validesa d'alguna expressió per a la probabilitat —sense recórrer a complexions o espai de fase que, en aquells moments, no tenien sentit per a la radiació— que conduís finalment a la llei de la distribució espectral del cos negre.

La novetat introduïda per Einstein —cultivada després en diverses formes— va consistir a invertir la utilització usual del principi de Boltzmann: davant la impossibilitat —no la dificultat, com en el cas de la matèria— de poder justificar una definició de probabilitat per a un estat de la radiació, opta per deduir aques-

⁶Per comprovar la contundència amb què Gibbs rebutja l'aplicació de la mecànica estadística a la radiació tèrmica, vegeu GIBBS (1902), 167 de la reimpressió.

ta probabilitat a partir de la validesa universal d'aquest principi. Amb aquest fi aplica la termodinàmica de la radiació per calcular, partint de la llei fenomenològica proposada per Wilhelm Wien (1864–1928) el 1896, la variació de l'entropia de la radiació en un procés on només hi ha variació de volum. El resultat del càlcul anterior, conjuntament amb l'aplicació del principi de Boltzmann, li permet justificar que la probabilitat que, en un instant escollit a l'atzar, l'energia de la radiació estigui continguda en la porció V del volum V_0 ve donada per:

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{E/h\nu}. \quad (8)$$

La comparació entre les expressions (7) i (8) —vàlides per al gas i per a la radiació, respectivament— el condueix a la conclusió fonamental del seu treball:⁷

«La radiació monocromàtica de baixa densitat (en el rang de validesa de la llei de radiació de Wien) es comporta termodinàmicament com si estigués constituïda per quàntums d'energia de magnitud $h\nu$, mútuament independents.»

Hi ha altres aspectes d'aquest treball d'Einstein de 1905 que mereixen una atenció especial per la seva rellevància per a la comprensió del desenvolupament de les primeres idees quàntiques. És conegut que Einstein no recorre en el seu treball a la llei de Planck, sinó a la proposta de Wien de 1896 —en un marc absolutament clàssic, per suposat— com a expressió de les dades experimentals sobre la radiació del cos negre. En vista d'això està completament justificada la doble pregunta: com és que Einstein no utilitza la llei de Planck i com és que també arriba a la quantificació de l'energia utilitzant la llei de Wien per la radiació?

Comencem per la primera qüestió. Tot i que en el seu article de 1905 Einstein es refereix a la llei de Planck com aquella que

⁷EINSTEIN (1905a), 143.

s'ha mostrat suficient per donar compte de totes les observacions fetes fins llavors, aquesta llei no fa cap paper en la resta del treball. Contràriament, basa els seus càlculs en la llei de Wien, raó per la qual —com fa notar en les conclusions— els resultats obtinguts només estan justificats en el rang de validesa d'aquesta llei. Tot i que no deixa constància escrita del motiu de la seva renúncia a emprar una llei que s'ajustava més als experiments, la raó ens sembla òbvia: és fàcil comprovar que, partint de la llei de Planck i mantenint el tractament emprat el 1905, no s'arriba a les expressions adequades per justificar l'analogia en la qual es basen les seves conclusions.

Pel que fa a la segona qüestió, la solució avui és clara. Com Ehrenfest va demostrar sis anys més tard, la llei proposada per Wien el 1896 fa tan necessària la quantificació de l'energia com la proposada per Planck el 1900, amb una complicació afegida en el primer cas. La llei de Planck exigeix que l'energia de la radiació monocromàtica de freqüència ν prengui els valors següents

$$E_n = nh\nu, \quad (9)$$

on n representa un nombre natural i tots els valors de n tenen el mateix pes estadístic —és a dir, no hi ha estats quàntics privilegiats, sempre que siguin compatibles amb les lligams del sistema. En canvi, la llei de Wien exigeix també la condició (9), però ara amb un pes estadístic diferent per cada valor de n , donat per $1/n!$ Tot això figura en un article escassament citat d'Ehrenfest, de 1911, dedicat a demostrar la ineludible necessitat —la suficiència estava clara des de 1900— d'introduir hipòtesis quàntiques en física en vista del comportament de la radiació del cos negre.⁸

Com que en els tractaments de Planck i d'Einstein —hi insistim: aquest sobre la base de la fórmula de Wien— només intervenen explícitament els possibles valors de l'energia i no els seus pesos respectius, els resultats que s'obtenen en tots dos casos per

⁸Vegeu NAVARRO i PÉREZ (2004), en particular 115–116.

a l'espectre d'energies són els mateixos. Així s'explica la «casualitat» —que, com acabem de veure, no ho és— que a Einstein li sortissin bé les coses emprant una llei que només reflectia adequadament les propietats de la radiació del cos negre dins el rang limitat de freqüències.

El treball inclou un cert contrast experimental del resultat bàsic obtingut —la quantificació de l'energia de la radiació— mitjançant la seva aplicació a l'anàlisi d'alguns fenòmens relacionats amb l'emissió i la transformació de la llum. Einstein presenta una explicació original i senzilla d'alguns fenòmens relacionats amb la producció i la transformació de la llum com indica el títol. Es tractava d'explicar-los recurrent als quàntums d'energia, sense que en aquestes explicacions aparegués cap referència als quàntums de Planck. Ens referirem lleugerament a les tres explicacions que apareixen en el treball.

S'ha d'assenyalar l'equívoc que suposa referir-se a l'efecte fotoelèctric com la motivació d'aquest article d'Einstein de 1905. L'explicació teòrica de l'efecte no era l'objectiu del treball; entre altres raons perquè les mesures existents en aquella època eren tan escasses que difícilment es podia detectar una violació del comportament clàssicament previst per a la radiació.

Einstein acabava analitzant tres fenòmens que podien servir de comprovació, almenys parcial, dels resultats sorprenents obtinguts al treball: la dita regla de Stokes, l'emissió de raigs catòdics per il·luminació de cossos sòlids (efecte fotoelèctric) i la ionització de gasos per llum ultraviolada. Un lleuger comentari sobre cadascun d'aquests fenòmens pot ajudar a comprendre tant el significat del quàntum d'energia introduït, com el grau de validesa dels resultats obtinguts.

a) *La regla de Stokes*. Es coneixia amb aquest nom el fet experimental observat que la freqüència de l'emissió per luminescència resultés inferior —o, millor, no superior— a la freqüència de la llum incident. Se suposava, tot i que no es reconeix explícitament en el treball, que el material luminescent no inverteix energia prò-

pia en el procés. Si s'admet, com fa Einstein, que cada quàntum d'energia incident origina un procés independent, la conservació de l'energia implica que:

$$h\nu_{inc} \geq h\nu_{em}, \quad (10)$$

relació que demostra la regla en qüestió.

Aquesta anàlisi del procés fa pensar en possibles violacions de la regla de Stokes. Per exemple, en el cas de gran il·luminació (seria factible llavors que més d'un quàntum incident pogués transformar-se en un sol quàntum emergent) o també quan la llum utilitzada no correspongués a la zona de l'espectre en què és vàlida la llei de Wien, condició de partida per a la introducció d'Einstein dels quàntums d'energia lluminosos.

b) La producció de raigs catòdics per il·luminació de cossos sòlids (o efecte fotoelèctric). Aquesta aplicació constitueix la part més divulgada del treball al qual ens estem referint i és la que en realitat se cita en la menció que acompanya la concessió del Premi Nobel de Física de 1921 (tot i que li va ser concedit el 1922): «pels seus serveis a la física teòrica i especialment pel seu descobriment de la llei de l'efecte fotoelèctric». Aquí ens referirem a alguns aspectes potser no tan coneguts.

L'efecte fotoelèctric va ser originalment detectat per Hertz, com un fenomen secundari —no va arribar a caracteritzar-lo— en els seus experiments relatius a la detecció d'ones electromagnètiques. Com s'ha destacat en algun cas, no deixa de ser una ironia de la història que, intentant detectar les ones que posaren de manifest l'estructura maxwell·liana (contínua!) del camp electromagnètic, observés també l'efecte fotoelèctric que havia d'ajudar a posar-ne de manifest l'estructura quàntica (discreta!). Però Einstein no es va referir en el treball a Hertz sinó a Lenard, ja que va ser aquest el que va posar de manifest per primera vegada que l'energia dels electrons emesos per una superfície metàl·lica il·luminada resultava independent de la intensitat de la radiació incident i no de la longitud d'ona.

No ens detindrem excessivament en l'explicació oferta per Einstein el 1905: l'augment de la intensitat mantenint constant la longitud d'ona es tradueix en un nombre més gran de processos, és a dir, en un nombre més gran d'electrons alliberats, però no en un augment de l'energia cinètica individual. D'acord amb la idea ja anticipada en l'explicació de la regla de Stokes, Einstein suposa que el procés és $u + u$: un quàntum cedeix tota la seva energia a un únic electró. Naturalment es tracta d'una hipòtesi addicional a la de l'estructura discreta de la radiació, tot i que no sempre es mencioni com a tal. A Einstein no se li va escapar aquesta subtilesa, i va justificar en el treball aquesta suposició sobre la base de la seva simplicitat.

Un petit càlcul numèric, basat en un simple balanç energètic, li va servir per arribar a una fórmula final que proporcionava l'explicació quantitativa de l'efecte. Més que el resultat, molt conegut per la seva àmplia divulgació als manuals, ens interessa ressaltar aquí la valoració prudent emprada per Einstein, en destacar senzillament que no observava contradicció entre la seva explicació i les mesures experimentals —escasses, certament— de Lenard.

En virtut dels comentaris anteriors, no sembla ajustat referir-se a aquest treball d'Einstein com «al de l'efecte fotoelèctric». En primer lloc, perquè no era aquest l'objectiu del treball; només es tracta d'una de les tres explicacions proposades per justificar la nova concepció sobre l'estructura discreta de la radiació. I, en segon lloc, perquè no hi havia gaire per explicar tenint en compte l'escàs nombre de dades experimentals fiables sobre l'efecte: per exemple, encara no existien resultats fiables sobre la variació de l'efecte amb la longitud d'ona incident. Tornarem sobre aquest tema en referir-nos a l'impacte.

c) *La ionització de gasos per llum ultraviolada.* És l'últim apartat del treball i Einstein el comença insistint en el caràcter addicional de la hipòtesi sobre el caràcter individual de la interacció: un quàntum i , ara, un molècula de gas. La ionització es dona quan l'energia del quàntum absorbit supera l'energia d'ionització de la

molècula.

L'apartat conclou amb una aplicació de les idees precedents a l'estimació de la cota superior per l'energia d'ionització en el cas de l'aire. Einstein va posar de manifest que el resultat anterior era aproximadament igual al proporcionat per les mesures experimentals de Johannes Stark (1874–1957), que eren les més fiables del moment.⁹

2.3 Primer impacte

A qui s'apropi a aquesta situació amb una estricta mentalitat actual, potser li resulta sorprenent descobrir que l'acollida del treball d'Einstein no va ser gens positiva. La tònica de l'impacte que va causar l'article en general, i la hipòtesi dels quàntums d'energia en concret, es pot detectar d'una manera aproximada a través de la presentació —altament elogiosa en el seu conjunt— d'Einstein com a membre de la Preussischen Akademie der Wissenschaften, llegida per Planck el juny de 1913:¹⁰

«Els sotasignats membres de l'Acadèmia tenen l'honor de proposar el Dr. Albert Einstein, professor ordinari de física teòrica de l'Institut Politècnic Federal de Zuric, per a la seva elecció com a membre regular de l'Acadèmia.[...] En suma, pot afirmar-se que, entre els problemes importants que tant abunden en la física moderna, és difícil trobar-ne un davant del qual Einstein no adopti una posició de manera notòria. El fet que alguna no doni en el blanc en les seves especulacions, com per exemple la hipòtesi sobre els quàntum de llum, no ha de ser gaire esgrimit en contra seva. Atès que sense assumir un risc de tant en tant resulta

⁹Premi Nobel de Física de 1919, «pel seu descobriment de l'efecte Doppler en els raigs canals i del desdoblament de les línies espectrals en camps elèctrics».

¹⁰BECK (1995), 336–338.

impossible, fins i tot en la ciència natural més exacta,
introduir veritables innovacions [...]

[Max] Planck
[Walther] Nernst
[Heinrich] Rubens
[Emil] Warburg.»

En principi es podia esperar que la prevenció davant els quàntums estava justificada amb escreix en tant que no es mesuressin amb fiabilitat les principals característiques experimentals de l'efecte fotoelèctric i es posés clarament de manifest el seu acord amb les previsions de la teoria quàntica esbossada per Einstein. Res més allunyat de la realitat: tot i que aquesta tasca experimental va ser portada a terme admirablement el 1916 per Robert A. Millikan (1868–1953),¹¹ ni tan sols aquest físic nord-americà —com la majoria de físics del moment— va creure que els resultats de les seves mesures representessin la confirmació de la hipòtesi quàntica, malgrat que va reconèixer que les previsions teòriques d'Einstein per a l'efecte fotoelèctric havien quedat plenament confirmades pels resultats dels seus experiments.¹²

«Malgrat l'èxit aparentment complet de l'equació d'Einstein [per a l'efecte fotoelèctric], la teoria física de la qual estava destinada a ser expressió simbòlica, va resultar tan insostenible que el mateix Einstein, crec que ja no la manté.»

Einstein mateix tampoc no mostrava una actitud decidida respecte d'aquest tema. Per exemple, al Primer Congrés Solvay (1911) va insistir en el caràcter provisional dels quàntums sobre la base

¹¹Premi Nobel de Física de 1923, «pel seu treball sobre la càrrega elemental de l'electró i sobre l'efecte fotoelèctric».

¹²MILLIKAN (1916b), 384. Versió en castellà: PAIS (1984), 387.

de la seva aparent incompatibilitat amb l'electromagnetisme de Maxwell, on es consagrava el caràcter continu de la propagació de l'energia; la seva correspondència amb Besso també reflectia contínuament dubtes del mateix tipus.

Les idees i els resultats de Planck, al contrari, van tenir una acceptació molt millor —o, almenys, no van ser clarament rebutjats— que els d'Einstein, a pesar de la cautela i les limitacions que aquest s'havia imposat en el seu article de 1905. Segons l'opinió de Pais,¹³ hi havia dues raons de pes per explicar aquesta diferència: una de tipus teòric i una altra de relacionada amb els desenvolupaments experimentals del moment.

Des d'un punt de vista teòric, la hipòtesi quàntica introduïda per Planck el 1900 no es referia a la natura de la radiació sinó a la variació discreta de l'energia de certs oscil·ladors —carregats elèctricament— en els fenòmens d'emissió i absorció de la radiació. Això no semblava afectar de cap manera la continuïtat del camp de radiació, implícita en la utilització de la teoria de Maxwell.

Des d'un punt de vista experimental, la hipòtesi de Planck proporcionava una explicació teòrica de la llei que ell mateix havia descobert, a la qual s'ajustaven amb precisió suficient fins als últims resultats experimentals del moment sobre la distribució espectral de la densitat d'energia emesa pel cos negre. Potser no hauríem de deixar de banda, pensem, una raó addicional de tipus sociològic: Planck era un catedràtic prestigiós de la Universitt Berlin, on el 1888 va ocupar la vacant deixada per Kirchhoff, que havia mort l'any anterior.

El cas d'Einstein era diferent. Es tractava d'un jove —pràcticament un desconegut el 1905— que irromp amb una hipòtesi quàntica que sembla suggerir la necessitat de rectificar, o almenys posar en dubte, les ja molt entronitzades equacions de Maxwell per al camp electromagnètic. I tot això a canvi de res, relativament, ja que no s'aplicava a la deducció de cap fórmula per a la distribució d'energia de la radiació —de fet Einstein partia d'una base més avi-

¹³PAIS (1984), 387-390.

at obsoleta, la fórmula de Wien—, sinó a l'obtenció d'una estranya conclusió que s'aplicava a l'anàlisi dels tres fenòmens citats en l'article; de fet, tres fenòmens no excessivament tractats teòricament en la bibliografia i sobre els quals tampoc hi havia prou resultats experimentals fiables. Per exemple, un resultat experimental tan decisiu per poder explicar teòricament l'efecte fotoelèctric com és la linealitat entre l'energia de l'electró alliberat i la freqüència de la radiació incident, va haver d'esperar més d'una dècada per ser detectat per Millikan. I, com hem vist, ni tan sols això va tenir cap influència en el rebuig generalitzat dels quàntums d'Einstein.

Després d'un llarg i sinuós camí de més de deu anys, els quàntums d'energia d'Einstein inicials —hi insistim: obscures unitats elementals d'intercanvi d'energia entre radiació i matèria— es van convertir en *photons*, autèntiques partícules elementals constituents de la radiació electromagnètica.¹⁴ El nom de *photon* és posterior; el va proposar Gilbert N. Lewis (1875–1946) a l'editor de la revista *Nature*. En la primera pàgina de la revista es pot llegir:

«Consequèntment em prenc la llibertat de proposar per a aquest hipotètic nou àtom [sic], que no és llum [per Lewis és un portador d'energia radiant] però que té un paper essencial en tot procés de radiació, el nom de *photon*».¹⁵

Aquest nom es va difondre aviat, especialment després que tingués lloc el Cinquè Congrés Solvay (1927), que va tenir lloc a Brussel·les, sota el lema «Electrons i photons».

Tot i que ens allunyem una mica de 1905, creiem que val la pena assenyalar que la introducció del concepte de *photon* no va estar exempta de problemes. Després del refús inicial de la nova partícula elemental —per la suposada incompatibilitat entre la noció cor-

¹⁴Per a una exposició detallada d'aquesta trajectòria que porta dels quàntums als fotons, i en la qual algun dels famosos *Gedanken-Experimente* —experiments concebuts mentalment— d'Einstein va tenir un paper important, vegeu NAVARRO (1990), 111–145.

¹⁵LEWIS (1926), 874.

puscular associada a ella i la concepció ondulatoria característica de l'electromagnetisme maxwellià—, la situació va canviar substancialment el 1923, quan Arthur H. Compton (1892–1962)¹⁶ —i també Peter J. W. Debye (1884–1966),¹⁷ de manera independent— van aconseguir una explicació teòrica ajustada als resultats experimentals obtinguts en analitzar la dispersió de raigs X per electrons atòmics dèbilment lligats (efecte Compton). I ho van fer unint en la seva explicació dues teories independents i controvertides d'Einstein: la teoria quàntica i la relativitat especial.

Lògicament, l'èxit de l'explicació teòrica de l'efecte Compton va representar un fort argument en favor tant de la relativitat com de la hipòtesi quàntica d'Einstein. Però tampoc això va ser suficient perquè el fotó, amb les seves implicacions, fos definitivament admès en l'escenari de la física. Per exemple, el 1924 Niels Bohr (1885–1962),¹⁸ Hendrik A. Kramers (1894–1952) i J. Clarke Slater (1900–1976) van publicar un treball titulat «La teoria quàntica de la radiació» —i després conegut com a BKS, per les inicials dels autors— en el qual s'intentava justificar el refús obert del fotó.¹⁹

La proposta BKS conduïa a eliminar qualsevol hipòtesi quàntica i, amb això, la noció mateixa de fotó, a canvi d'assignar a la radiació electromagnètica en la seva interacció amb la matèria unes propietats tan atípiques com la possible violació de la conservació de l'energia i del moment lineal; es recorria a més, a uns misteriosos camps virtuals incompatibles amb la causalitat ordinària. Cap d'aquestes idees resulta estranya en la física actual, però el 1924 es van utilitzar en una sola direcció: la de desterrar definitivament el

¹⁶Premi Nobel de Física de 1927 «pel seu descobriment de l'efecte que porta el seu nom». El premi d'aquell any va ser compartit amb Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) «pel seu mètode per visualitzar les trajectòries de partícules carregades elèctricament mitjançant la condensació de vapor».

¹⁷Premi Nobel de Química de 1936 «per les seves contribucions al nostre coneixement de l'estructura molecular mitjançant les seves investigacions sobre moments dipolars i sobre la difracció de raigs X i electrons en gasos».

¹⁸Premi Nobel de Física de 1922 «pels seus serveis a la investigació de l'estructura dels àtoms i de la radiació que n'emana».

¹⁹BOHR et al. (1924).

fotó.

Les idees desenvolupades a BKS no es van imposar mai, uns mesos després —el 1924 i el 1925— Walther Bothe (1891–1957)²⁰ i Hans Geiger (1882–1945) van publicar diferents treballs de caràcter experimental en els quals, a través d'una anàlisi enginyosa i original de certes característiques de l'efecte Compton, posaven de manifest el caràcter insostenible de les principals hipòtesis de BKS, i alhora confirmaven les previsions basades en les idees einsteinianes. Es podria afirmar que és des de llavors que el fotó ocupa un lloc destacat en l'escenari de la física.²¹

A partir d'aquí, i per diverses circumstàncies, el desenvolupament de la física quàntica va canviar de rumb dràsticament. El problema de la natura i el comportament de la radiació electro-magnètica no es va resoldre fins el 1927, quan Paul A. M. Dirac (1902–1984)²² va posar les bases de la teoria quàntica de la radiació, fent compatible la quantificació implicada per l'existència dels fotons amb la validesa de les equacions de Maxwell, convenientment reinterpretades. Però abans, especialment des de 1925, el problema de la radiació havia estat parcialment reemplaçat —en importància i dedicació— pel comportament dels electrons atòmics. La solució d'aquest problema va arribar aviat a través de la formulació de la mecànica quàntica.²³ El 1925 amb la versió matricial de Werner Heisenberg (1901–1976),²⁴ i el 1926 amb la

²⁰Premi Nobel de Física de 1954 «pel mètode de coincidència i els descobriments que va fer amb aquest mètode». Aquest premi va ser compartit amb Max Born (1882–1970) «per la seva investigació fonamental en mecànica quàntica, especialment per la seva interpretació estadística de la funció d'ona».

²¹Per a més detalls sobre la proposta BKS, així com sobre la seva refutació experimental, podeu veure el capítol 22 de PAIS (1984).

²²Premi Nobel de Física de 1933 «pel descobriment de noves formes productives de la teoria atòmica». Aquest premi va ser compartit amb Schrödinger.

²³Per a més detalls al voltant de les aportacions d'Einstein al naixement de la mecànica ondulatoria, a través de la seva teoria quàntica dels gasos ideals, podeu veure, per exemple NAVARRO (1990), capítol III.

²⁴Premi Nobel de Física de 1932 «per la creació de la mecànica quàntica, l'aplicació de la qual ha conduït, entre altres coses, al descobriment de les

versió ondulatoria d'Erwin Schrödinger (1887–1961).²⁵

Com és ben sabut, la mecànica quàntica sorgida el 1925–1926 no va ser mai acceptada per Einstein com la solució definitiva per explicar el comportament dels àtoms, bàsicament, perquè la considerava una teoria «incompleta», en virtut de l'indeterminisme essencial que incorpora, segons la interpretació coneguda com a «interpretació de Copenhagen», que aviat es va constituir com a interpretació ortodoxa del formalisme matemàtic de la mecànica quàntica. Einstein no va cessar mai en l'intent de desentranyar el misteri amagat en el comportament dels quàntums de radiació primer, i en les partícules atòmiques després. Però mai va arribar a un resultat convincent, ni per ell ni pels altres, cosa que li va produir una insatisfacció permanent que ell mateix va sintetitzar, potser amb un pessimisme excessiu i injustificat, en les línies escrites en l'etapa final de la seva vida al seu amic Besso:²⁶

«Un total de cinquanta anys d'especulació conscient no m'han acostat a la resposta de la pregunta “què són els quàntums de llum?” És cert que avui en dia qualsevol pillastre creu que coneix aquesta resposta, però s'equivoca.»

Finalment un comentari sobre la concessió a Einstein del Premi Nobel de Física de 1921, tema al qual ja ens hem referit en l'apartat 2.2. Sense entrar en els detalls de les propostes nombroses i variades que donaven suport a la seva candidatura des de 1910,²⁷ potser resulta sorprenent per alguns constatar que la recompensa no li arribés per la seva teoria de la relativitat. Però l'escassa

formes al·lotròpiques de l'hidrogen».

²⁵Premi Nobel de Física de 1933 «pel descobriment de noves formes productives de la teoria atòmica». Aquest premi va ser compartit amb Dirac.

²⁶Carta d'A. Einstein a M. Besso, 12 de desembre de 1951. A *SPEZIALI* (1994), 396.

²⁷Per a una exposició de les vicissituds per què va haver de passar Einstein fins que el Comitè Nobel el va proposar com a candidat únic al Premi Nobel de Física de 1921, podeu veure PAIS (1984), capítol 30.

evidència experimental d'aquesta teoria que existia en aquell moment, segons l'opinió dels influents membres del Comitè, impedia considerar-la com una teoria confirmada. Una cosa semblant es podria dir de la seva discutida teoria quàntica. Però no de la llei que regeix l'efecte fotoelèctric, atès que l'equació proposada el 1905 ja s'havia contrastat experimentalment fins a la sacietat.

Davant les pressions de diferent tipus perquè la ja mítica figura rebés el famós premi, el Comitè —tradicionalment conservador— va optar per la solució de mínim risc: a Einstein se li va concedir el premi en reconeixença de les seves grans aportacions a la física teòrica en general i a la llei de l'efecte fotoelèctric en concret, però això no implicava cap reconeixença explícita de la seva teoria quàntica ni de la seva teoria de la relativitat. La solució no va satisfer tothom. Probablement ni Einstein mateix, si ens atenim al discurs Nobel —pronunciat el 13 de juliol de 1923, més de sis mesos després que se li comunicés la concessió— que portava el títol explícit d'«Idees i problemes fonamentals de la teoria de la relativitat».

Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum

Traducció d'Oliver Strunck.

Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum

Entre les representacions teòriques creades pels físics sobre els gasos i altres cossos ponderables i la teoria de Maxwell sobre els processos electromagnètics en l'anomenat espai buit, hi ha una diferència formal profunda. Mentre que considerem que l'estat d'un cos està totalment determinat per les posicions i les velocitats d'una quantitat molt gran, però finita, d'àtoms i electrons, en canvi fem servir funcions espacials contínues per determinar l'estat electromagnètic d'un espai, de tal manera que no es considera suficient una quantitat finita de magnituds per a la determinació completa de l'estat electromagnètic d'un espai. Segons la teoria de Maxwell, l'energia s'ha d'entendre com una funció espacial contínua en totes les manifestacions purament electromagnètiques, per tant també en el cas de la llum, mentre que, segons la concepció actual dels físics, l'energia d'un cos ponderable s'ha de representar com una suma estesa sobre els àtoms i electrons. L'energia d'un cos ponderable no pot descompondre's en parts tan nombroses o petites com es vulgui, mentre que l'energia d'un raig de llum sorgit d'una font puntual de llum es reparteix de manera contínua segons la teoria de Maxwell (o, en general, segons qualsevol teoria ondulatòria) en un volum que creix constantment.

La teoria ondulatòria que opera amb funcions espacials contínues ha demostrat que és adequada per representar els fenòmens purament òptics i segurament no serà mai substituïda per cap altra teoria. Malgrat això, no s'ha de perdre de vista que les observacions òptiques es refereixen a valors mitjans temporals i no pas a valors instantanis i seria concebible, malgrat la plena confirmació experimental de les teories de la difracció, reflexió, refracció, dispersió, etc., que la teoria de la llum que fa servir funcions espacials contínues es contradigués amb l'experiència si s'apliqués a fenòmens de producció i transformació de la llum.

De fet, em sembla que les observacions de la «radiació del cos negre», la fotoluminescència, la generació de raigs catòdics per

llum ultraviolada i altres grups de fenòmens relatius a la producció i transformació de la llum les podríem entendre més fàcilment si partíssim de la suposició que l'energia de la llum es distribueix de manera discontinua en l'espai. Segons aquesta suposició que acabem de presentar, en la propagació d'un raig de llum sorgit d'un punt, l'energia no es distribueix de manera contínua en un espai cada vegada més gran, sinó que es compon d'un nombre finit de quàntums d'energia localitzats en punts de l'espai; aquests quàntums són mòbils, no poden dividir-se i només poden ser absorbits o generats com un tot.

A continuació explicaré el raonament i introduiré els fets que m'han conduït cap a aquest camí, tot esperant que la perspectiva que vull mostrar pugui resultar útil per a la recerca d'alguns investigadors.

§1. Sobre una dificultat que afecta la teoria de la «radiació del cos negre»

Per començar ens situem en la perspectiva de la teoria de Maxwell i de la teoria dels electrons per considerar el cas següent. En un espai tancat per parets totalment reflectores hi ha una quantitat de molècules de gas i electrons que es mouen lliurement i que, quan s'apropen suficientment, exerceixen forces conservatives els uns sobre els altres, és a dir, quan poden xocar entre ells com les molècules d'un gas segons la teoria cinètica dels gasos.¹ Suposem, a més, que una quantitat d'electrons està lligada a punts de l'espai, molt separats entre ells, per forces que són proporcionals a les elongacions i en la direcció d'aquests punts. Aquests electrons també tenen una interacció conservativa amb les molècules lliures i els electrons quan aquests darrers se'ls apropen. Aquests electrons

¹Aquesta suposició té una importància similar a la hipòtesi segons la qual les energies cinètiques mitjanes de les molècules de gas i dels electrons són iguals entre elles. Gràcies a l'última hipòtesi, Drude ha pogut deduir teòricament, tal com ja sabem, la relació de la capacitat conductora tèrmica o elèctrica dels metalls.

lligats a un punt de l'espai, que anomenem «ressonadors» emeten i absorbeixen ones electromagnètiques d'un període determinat.

Segons l'opinió actual sobre l'origen de la llum, la radiació en l'espai considerat, que està sotmesa a la teoria de Maxwell per al cas d'equilibri dinàmic, hauria de ser idèntica a la «radiació del cos negre» —si més no si se suposa l'existència de ressonadors de totes les freqüències rellevants.

De moment, deixem de banda la radiació emesa i absorbida pels ressonadors i ens demanem quina és la condició per a l'equilibri dinàmic relacionada amb l'efecte recíproc (els xocs) de les molècules i els electrons. La teoria cinètica dels gasos l'explica dient que l'energia cinètica mitjana d'un electró ressonador ha de ser igual a l'energia cinètica mitjana del moviment de translació d'una molècula de gas. Si descomponem el moviment de l'electró ressonador en tres moviments d'oscil·lació perpendiculars entre ells, aleshores trobem el valor mitjà $\bar{E}$ de l'energia d'un d'aquests moviments d'oscil·lació

$$\bar{E} = \frac{R}{N} T,$$

on R significa la constant universal dels gasos, N , el nombre de «molècules reals» en un equivalent gram i T , la temperatura absoluta. Per tant, com a conseqüència de la igualtat del valor mitjà temporal de l'energia cinètica i potencial del ressonador, l'energia $\bar{E}$ és dos terços de l'energia cinètica d'una molècula lliure d'un gas monoatòmic. Si per qualsevol causa —en el nostre cas, pels processos de radiació— l'energia d'un ressonador tingués un valor mitjà temporal superior o inferior al que té $\bar{E}$, aleshores els xocs dels electrons lliures i les molècules suposarien una emissió o absorció d'energia mitjana del gas diferent de zero. Per tant, en el cas que estem considerant és possible l'equilibri dinàmic tan sols si cada un dels ressonadors té l'energia mitjana $\bar{E}$. Ara plantejem una reflexió similar a la interacció entre els ressonadors i la radiació present en l'espai. Per a aquest cas, amb la hipòtesi que la radiació es pot

considerar com el procés més desordenat imaginable,² Planck ha deduït la condició d'equilibri dinàmic.³ Va trobar:

$$\bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2} \rho_\nu.$$

$\bar{E}_\nu$ és aquí l'energia mitjana d'un ressonador amb freqüència pròpia ν (per a cada component d'oscil·lació), L , la velocitat de la llum, ν , la freqüència i $\rho_\nu \delta\nu$ l'energia per unitat de volum de la component de la radiació que té la freqüència compresa entre ν i $\nu + d\nu$.

²Aquesta hipòtesi es pot formular de la següent manera. Desenvolupem la component Z de la força elèctrica en una sèrie de Fourier (Z) en un punt arbitrari de l'espai, entre els límits de temps $t = 0$ i $t = T$ (on T representa un temps molt gran en relació amb tots els altres períodes que s'han de tenir en compte)

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \sin \left(2\pi\nu \frac{t}{T} + \alpha_\nu \right),$$

on $A_\nu \geq 0$ i $0 \leq \alpha_\nu \leq 2\pi$. Si ens imaginem que fem (sovint arbitràriament) un desenvolupament d'aquesta mena en el mateix punt de l'espai, escollint a l'atzar els instants inicials de temps, aleshores obtindrem sistemes de valors diferents per a les magnituds A_ν i α_ν . Per a la freqüència de les diferents combinacions de valors de les magnituds A_ν i α_ν hi ha, per tant, probabilitats (estadístiques) dW del tipus:

$$dW = f(A_1, A_2 \dots \alpha_1, \alpha_2 \dots) dA_1 dA_2 \dots d\alpha_1 d\alpha_2 \dots$$

La radiació és aleshores la més desordenada possible, si

$$f(A_1, A_2 \dots \alpha_1, \alpha_2 \dots) = F_1(A_1)F_2(A_2) \dots f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2) \dots,$$

és a dir, si la probabilitat d'un valor determinat d'una de les magnituds A o α [a l'original apareix per error x en comptes d' α] és independent dels valors que tenen les altres magnituds A o α respectivament. D'aquí, com més aproximadament es compleixi la condició que els parells individuals de quantitats A_ν i α_ν depenguin de l'emissió i absorció en processos de grups *particulars* de ressonadors, la radiació estarà més a prop de «l'estat més desordenat imaginable».

³M. PLANCK, *Annalen der Physik*, 1, 99 (1900).

Si, en conjunt, l'energia de radiació de la freqüència ν no augmenta ni disminueix constantment, aleshores ha de ser:

$$\frac{R}{N} T = \bar{E} = \bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2} \rho_\nu,$$

$$\rho_\nu = \frac{R}{N} \frac{8\pi\nu^2}{L^3} T.$$

Aquesta relació establerta com a condició d'equilibri dinàmic no només no concorda amb l'experiència, sinó que a més diu que en el nostre model no es pot parlar d'una distribució determinada de l'energia entre èter i matèria. Com més ampli sigui el rang triat de les freqüències dels ressonadors, més alta serà l'energia de radiació de l'espai i en el límit tindrem:

$$\int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{R}{N} \frac{8\pi}{L^3} T \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty.$$

§2. Sobre la determinació dels quàntums elementals segons Planck

A continuació volem mostrar que la determinació de Planck dels quàntums elementals és, en certa manera, independent de la teoria de la «radiació del cos negre» establerta per ell mateix.

La fórmula⁴ de Planck per a ρ_ν , que concorda amb tots els experiments fets fins ara, diu:

$$\rho_\nu = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1},$$

$$\alpha = 6,10 \cdot 10^{-56},$$

$$\beta = 4,866 \cdot 10^{-11}.$$

⁴M. PLANCK, *Annalen der Physik*, 4, 561 (1901).

Per a valors elevats de T/ν , és a dir, per a longituds d'ona grans i densitats de radiació grans, aquesta fórmula tendeix en el límit a:

$$\rho_\nu = \frac{\alpha}{\beta} \nu^2 T.$$

Podem veure que aquesta fórmula concorda amb la fórmula desenvolupada en l'apartat 1 a partir de la teoria dels electrons i de la teoria de Maxwell. Si igualem els coeficients d'ambdues fórmules obtenim:

$$\frac{R}{N} \frac{8\pi}{L^3} = \frac{\alpha}{\beta}$$

o

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \frac{8\pi R}{L^3} = 6,17 \cdot 10^{23},$$

és a dir, un àtom d'hidrogen pesa $1/N$ gram $= 1,62 \cdot 10^{-24}$ g. Aquest és exactament el mateix valor que ha trobat Planck, i concorda de manera satisfactòria amb els valors d'aquesta magnitud que s'han trobat per altres camins.

Així doncs, arribem a la conclusió següent: com més alta és la densitat d'energia i més llarga la longitud d'ona de la radiació, les bases teòriques que hem fet servir són més idònies; però, per a una longitud d'ona de radiació curta i densitat de radiació baixa, fracassen completament.

A continuació examinarem la «radiació del cos negre» pel que fa a l'experiència sense partir de cap model de producció i propagació de la radiació.

§3. Sobre l'entropia de la radiació

En un reconegut treball de W. Wien es troben les consideracions següents; només les presentem per completar la nostra exposició.

Considerem una radiació que ocupa un volum v . Suposem que estan completament determinades les propietats observables d'aquesta un cop donada la densitat de la radiació $\rho(\nu)$ per a totes

les freqüències.⁵ Atès que podem considerar que radiacions de freqüències diverses es poden separar les unes de les altres sense producció de treball ni intercanvi de calor, aleshores l'entropia de la radiació es pot representar així:

$$S = v \int_0^{\infty} \varphi(\rho, \nu) d\nu,$$

on φ és una funció de les variables ρ i ν . Podem reduir φ a una funció d'una única variable amb la suposició que l'entropia d'una radiació no es modifica per la compressió adiabàtica d'aquesta radiació entre parets reflectores. De totes maneres, no volem entrar en aquest aspecte, sinó analitzar directament com es pot obtenir la funció φ a partir de la llei de radiació d'un cos negre.

En el cas de la «radiació del cos negre», ρ és la funció de ν que fa que l'entropia per a una energia donada sigui màxima, és a dir, que

$$\delta \int_0^{\infty} \varphi(\rho, \nu) d\nu = 0,$$

si

$$\delta \int_0^{\infty} \rho d\nu = 0.$$

D'això es desprèn que, per a qualsevol elecció de $\delta\rho$ com a funció de ν ,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \lambda \right) \delta \rho d\nu = 0,$$

on λ és independent de ν . Per tant, en la radiació del cos negre $\partial\varphi/\partial\rho$ és independent de ν .

⁵Aquesta és una suposició arbitrària. Naturalment la podem mantenir fins que l'experiment ens obligui a abandonar-la.

Quan l'augment de temperatura d'una radiació del cos negre de volum $v = 1$ val dT tenim l'equació:

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho d\nu,$$

o, atès que $\partial \varphi / \partial \rho$ és independent de ν :

$$dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} dE.$$

Com que dE és igual a la calor afegida i el procés és reversible, aleshores també tenim:

$$dS = \frac{1}{T} dE.$$

Comparant, obtenim:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{T}.$$

Aquesta és la llei de la radiació del cos negre. Podem, doncs, determinar la llei de la radiació del cos negre a partir de la funció φ i, a la inversa, determinar a partir d'aquesta llei la funció φ per integració, tenint en compte que φ s'anul·la per $\rho = 0$.

§4. Llei límit per a l'entropia de radiació monocromàtica de baixa densitat de radiació

De les observacions que hem fet fins ara sobre la «radiació del cos negre» se segueix que la llei de la «radiació del cos negre» que va establir originàriament W. Wien

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

no és estrictament vàlida. Aquesta llei, però, ha estat precisament confirmada experimentalment per a valors grans de ν/T . Per tant,

ens basem en aquesta fórmula, però no oblidem que els nostres resultats són vàlids només dins uns límits determinats.

D'aquesta fórmula es desprèn primerament:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{\rho}{\alpha\nu^3}$$

i, a continuació, fent servir les relacions establertes en les seccions anteriors:

$$\varphi(\rho, \nu) = -\frac{\rho}{\beta\nu} \left\{ \ln \frac{\rho}{\alpha\nu^3} - 1 \right\}.$$

Considerem una radiació d'energia E , la freqüència de la qual se situa entre ν i $\nu + d\nu$ i que ocupa el volum v . L'entropia d'aquesta radiació és:

$$S = v\varphi(\rho, \nu)d\nu = -\frac{E}{\beta\nu} \left\{ \ln \frac{E}{v\alpha\nu^3 d\nu} - 1 \right\}.$$

Si ens limitem a analitzar la dependència de l'entropia respecte del volum que ocupa la radiació i anomenem S_0 l'entropia de la radiació en un volum v_0 , aleshores obtenim:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \ln \left(\frac{v}{v_0} \right).$$

Aquesta equació mostra que l'entropia d'una radiació monocromàtica de densitat prou petita varia respecte del volum segons la mateixa llei que l'entropia d'un gas ideal o d'una solució diluïda. L'equació que acabem d'establir serà interpretada a continuació sobre la base del principi, introduït a la física per Boltzmann, segons el qual l'entropia d'un sistema és una funció de la probabilitat del seu estat.

§5. Investigació teoricomolecular de la dependència respecte del volum de l'entropia de gasos i solucions diluïdes

En el càlcul de l'entropia per mètodes teoricomoleculars s'utilitza amb freqüència el terme «probabilitat» amb un sentit que

no es correspon exactament amb la definició de probabilitat que es fa servir en el càlcul de probabilitats. En particular, els «casos d'igual probabilitat» s'acostumen a establir hipotèticament, quan els models teòrics aplicats són efectivament suficients per fer una deducció en lloc de fer una hipòtesi. Mostraré en un treball a part que l'anomenada «probabilitat estadística» és del tot suficient, per tractar dels processos tèrmics, i espero que això elimini una dificultat lògica que encara s'oposa al desenvolupament del principi de Boltzmann. De totes maneres, aquí es donarà només una formulació general del principi d'aplicació que es fa en casos molt concrets.

Si té sentit parlar de la probabilitat de l'estat d'un sistema, i si, a més, qualsevol increment d'entropia es pot entendre com una transició cap a un estat probable, aleshores l'entropia S_1 d'un sistema és una funció de la probabilitat W_1 del seu estat instantani. Per tant, si tenim dos sistemes S_1 i S_2 que no interaccionen entre ells, aleshores podem escriure

$$S_1 = \varphi_1(W_1),$$

$$S_2 = \varphi_2(W_2).$$

Si ens mirem ambdós sistemes com un únic sistema d'entropia S i de probabilitat W , aleshores:

$$S = S_1 + S_2 = \varphi(W)$$

i

$$W = W_1 \cdot W_2.$$

La darrera relació ens diu que ambdós sistemes són esdeveniments independents l'un de l'altre.

D'aquesta equació es dedueix:

$$\varphi(W_1 \cdot W_2) = \varphi_1(W_1) + \varphi_2(W_2)$$

i d'aquí finalment:

$$\varphi_1(W_1) = C \ln(W_1) + \text{const.},$$

$$\varphi_2(W_2) = C \ln(W_2) + \text{const.},$$

$$\varphi(W) = C \ln(W) + \text{const.}$$

La magnitud C és, per tant, una constant universal. Tal com es desprèn de la teoria cinètica dels gasos, té el valor R/N , on les constants R i N tenen el mateix significat que els hem atribuït més amunt. Si S_0 és l'entropia en un determinat estat inicial del sistema considerat i W la probabilitat relativa d'un estat que té entropia S , aleshores podem establir en general:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \ln W.$$

Tractarem ara el cas especial següent: en un volum v_0 , tenim un nombre (n) de punts mòbils (per exemple, molècules) als quals ens hem de referir en la nostra disquisició. A part d'aquests hi pot haver en aquest espai tants altres punts mòbils com vulguem i de qualsevol mena. No pressuposem res sobre la llei que governa el moviment en l'espai dels punts en observació en el volum, excepte que no hi ha cap part de l'espai (ni cap direcció) privilegiada, pel que fa a aquest moviment. El nombre dels punts mòbils abans esmentats és tan reduït que podem negligir l'efecte que els uns poden tenir sobre els altres.

El sistema considerat, que pot ser un gas ideal o una solució diluïda, té una determinada entropia S_0 . Ens imaginem una part del volum v_0 de mida v i tots els n -punts mòbils col·locats en el volum v , sense que canviï res del sistema. És obvi que a aquest estat hi correspondrà un altre valor de l'entropia (S). Ara ens proposem determinar la diferència d'entropia amb l'ajuda del principi de Boltzmann.

Ens plantejem: com n'és, de gran, la probabilitat del darrer estat esmentat en relació amb l'original? O: com n'és, de gran, la probabilitat que en un instant de temps escollit a l'atzar tots els

n -punts mòbils independents entre ells que es troben en un volum v_0 es trobin (per atzar) en un volum v ?

Per a aquesta probabilitat, que és una «probabilitat estadística», obtenim òbviament el valor:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n;$$

d'aquí, aplicant el principi de Boltzmann, obtenim:

$$S - S_0 = R \left(\frac{n}{N}\right) \ln \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

S'ha de remarcar que, en la derivació d'aquesta equació, de la qual és fàcil derivar termodinàmicament la llei de Boyle-Gay-Lussac i la llei anàloga de la pressió osmòtica,⁶ no cal fer cap mena d'hipòtesi sobre la llei que governa el moviment de les molècules.

§6. Interpretació segons el principi de Boltzmann de l'expressió de la dependència de l'entropia de la radiació monocromàtica respecte del volum

En l'apartat 4 hem trobat la manera d'expressar la relació de dependència de l'entropia de la radiació monocromàtica respecte del volum:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Si reescrivim aquesta fórmula d'aquesta altra manera:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \ln \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{N}{R} \frac{E}{\beta\nu}} \right]$$

⁶Si E és l'energia del sistema, aleshores obtenim

$$-d(E - TS) = pdv = TdS = R \frac{n}{N} \frac{dv}{v};$$

i, per tant:

$$pv = R \frac{n}{N} T.$$

i la comparem amb la fórmula general que expressa el principi de Boltzmann

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \ln W,$$

arribem a la conclusió següent.

Si una radiació monocromàtica de freqüència ν i energia E està confinada (entre parets reflectores) dins el volum v_0 , aleshores la probabilitat que tota l'energia de la radiació es trobi en un instant de temps escollit a l'atzar en un volum parcial v del volum v_0 és

$$W = \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{N}{R} \frac{E}{\beta \nu}}.$$

D'aquí concloem, a més, que la radiació monocromàtica de baixa densitat (dins de l'àmbit de validesa de la fórmula de radiació de Wien) es comporta termodinàmicament com si estigués formada per quàntums d'energia independents els uns dels altres i que valen $R\beta\nu/N$.

Encara volem comparar, però, la magnitud mitjana dels quàntums d'energia de la «radiació del cos negre» amb l'energia cinètica mitjana del moviment del centre de masses d'una molècula a la mateixa temperatura. Aquesta darrera és $3/2 (R/N)T$, mentre que, per al valor mitjà del quàntum d'energia, si ens basem en la fórmula de Wien, s'obté:

$$\frac{\int_0^\infty \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}} d\nu}{\int_0^\infty \frac{N}{R\beta \nu} \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}} d\nu} = 3 \frac{R}{N} T.$$

Ara bé, si, pel que fa a la dependència de l'entropia del volum, la radiació monocromàtica (d'una densitat prou baixa) es comporta com un medi discontinu que està format per quàntums d'energia de magnitud $R\beta\nu/N$, aleshores ens hem de plantejar si les lleis de la producció i la transformació també estan fetes com si la llum estigués composta per quàntums d'energia del mateix tipus. Ens dedicarem a aquesta qüestió tot seguit.

§7. Sobre la regla de Stokes

Diguem que una llum monocromàtica es transforma mitjançant fotoluminescència en llum d'una altra freqüència i que, segons el resultat que hem obtingut, suposem que tant la llum incident com la llum emesa estan formades per quàntums d'energia de magnitud $(R/N)\beta\nu$, on ν és la freqüència corresponent. El procés de transformació s'haurà d'interpretar de la manera següent: Cada quàntum d'energia incident de freqüència ν_1 és absorbit i dóna peu per si mateix —si més no quan hi ha una densitat de distribució dels quàntums d'energia incidents prou baixa— a la creació d'un quàntum de llum de freqüència ν_2 ; és possible que durant l'absorció del quàntum de llum incident també sorgeixin simultàniament quàntums de llum de freqüències ν_3, ν_4 , etc., així com energia d'alguna altra mena (p. ex., calor). És indiferent amb quins processos intermedis arribem al resultat final. Si la substància fotoluminescent no es considera com una font constant d'energia, aleshores l'energia d'un quàntum d'energia emès no pot ser —segons el principi de conservació de l'energia— més gran que l'energia d'un quàntum de llum incident; per tant, ha de ser vàlida la fórmula:

$$\frac{R}{N}\beta\nu_2 \leq \frac{R}{N}\beta\nu_1$$

o

$$\nu_2 \leq \nu_1.$$

Aquesta és la coneguda regla de Stokes.

S'ha de destacar especialment que, segons la nostra concepció, en el cas d'una il·luminació feble, la quantitat de llum emesa en les mateixes circumstàncies ha de ser proporcional a la intensitat de llum incident, perquè tot quàntum d'energia incident produirà un procés elemental del tipus que s'ha esmentat més amunt, independentment de l'efecte dels altres quàntums d'energia incidents. Concretament, no hi haurà cap límit inferior per a la intensitat de la llum incident, per sota del qual la llum sigui incapaç de provocar l'emissió de llum.

Segons la concepció dels fenòmens que hem presentat, podem concebre desviacions de la regla de Stokes en els casos següents:

1. quan el nombre de quàntums d'energia que es transformen simultàniament és tan gran que un quàntum d'energia de llum emesa pot obtenir la seva energia de diversos quàntums d'energia incidents;
2. quan la llum incident (o emesa) no té les mateixes propietats energètiques que la radiació del cos negre dins el rang de validesa de la llei de Wien, com ara quan la llum incident prové d'un cos a una temperatura tan alta que la llei de Wien no és vàlida per a les longituds d'ona considerades.

La possibilitat que hem esmentat en darrer lloc té un interès especial perquè, segons la concepció que hem desenvolupat, no es pot excloure que una «radiació no de Wien», fins i tot molt diluïda, tingui un comportament energètic diferent al d'una «radiació negra» dins l'àmbit de validesa de la llei de Wien.

§8. Sobre la producció de raigs catòdics mitjançant la il·luminació de cossos sòlids

La concepció tradicional que sosté que l'energia de la llum està distribuïda de manera contínua per l'espai presenta grans problemes quan s'intenten entendre els fenòmens fotoelèctrics, tal com explica el treball innovador de Lenard.⁷

A partir de la concepció segons la qual la llum incident està formada per quàntums d'energia $(R/N)\beta\nu$, es pot explicar la generació de raigs catòdics mitjançant la llum de la manera següent. S'introdueixen quàntums d'energia dins la capa superficial del cos i la seva energia es transforma, si més no parcialment, en energia cinètica dels electrons. En la representació més senzilla, un quàntum de llum transmet tota la seva energia a un únic electró; suposem que és així com succeeix, tot i que, de totes maneres, no es pugui excloure que els electrons absorbeixin només parcialment

⁷P. LENARD, *Annalen der Physik*, **8**, 169–170 (1902).

l'energia dels quàntums de llum. Un electró dotat d'energia cinètica en l'interior d'un cos haurà perdut una part de la seva energia cinètica quan arribi a la superfície. A més, s'ha de suposar que tot electró ha de realitzar un treball P (característic del cos) per tal d'abandonar-lo. Els electrons que surten del cos amb la velocitat normal més gran són aquells que, trobant-se sobre la mateixa superfície, han estat excitats en direcció normal a aquesta superfície. L'energia cinètica d'aquests electrons és

$$\frac{R}{N}\beta\nu - P.$$

Si el cos carregat al potencial positiu Π està envoltat de conductors de potencial zero i Π és suficient per impedir la pèrdua d'electricitat del cos, aleshores tenim:

$$\Pi\epsilon = \frac{R}{N}\beta\nu - P,$$

on ϵ representa la càrrega de l'electró o

$$\Pi E = R\beta\nu - P',$$

on E representa la càrrega d'un equivalent gram d'un ió monovalent i P' el potencial en relació amb el cos d'aquesta quantitat d'electricitat negativa.⁸

Si es fa l'equivalència $E = 9,6 \cdot 10^3$, aleshores $\Pi \cdot 10^{-8}$ és el potencial en volts que assoleix el cos en ser il·luminat en el buit.

Per tal de veure primerament si la relació deduïda concorda amb l'experiència en ordre de magnitud, fem les equivalències $P' = 0$, $\nu = 1,03 \cdot 10^{15}$ (que correspon al límit ultraviolat de l'espectre solar) i $\beta = 4,866 \cdot 10^{-11}$. Obtenim $\Pi \cdot 10^{-7} = 4,3 \text{ V}$,*

⁸Si partim de la suposició que, per alliberar l'electró individual d'una molècula neutra per la llum, s'hi ha d'esmerçar un treball determinat, aleshores no s'ha de canviar res de la relació deduïda; únicament s'ha d'entendre P' com la suma de dos sumands.

*En l'original figura per error $\Pi \cdot 10^7$.

resultat que concorda en ordre de magnitud amb els resultats de Lenard.⁹

Si la fórmula que hem obtingut és correcta, aleshores Π , quan s'expressa en coordenades cartesianes, com a funció de la freqüència de la llum incident, ha de ser una recta, el pendent de la qual és independent de la natura de la substància investigada.

Al meu entendre la nostra concepció no es contradiu amb les propietats de l'efecte fotoelèctric observades per Lenard. Si cada quàntum d'energia de la llum incident independentment de la resta transmet la seva energia als electrons, aleshores la distribució de velocitats dels electrons, és a dir, la qualitat de la radiació catòdica generada, serà independent de la intensitat de la llum incident; d'altra banda, en les mateixes circumstàncies, el nombre d'electrons que abandonen el cos serà proporcional a la intensitat de la llum incident.¹⁰

Consideracions anàlogues a les que hem fet en relació amb les possibles desviacions respecte de la regla de Stokes s'apliquen pel que fa als límits de validesa de les lleis esmentades més amunt.

Fins aquí s'ha assumit que una part, si més no, dels quàntums d'energia de la llum incident cedeixen tota la seva energia a un únic electró. Si no fem aquesta hipòtesi senzilla, aleshores obtenim, en lloc de l'equació d'abans, aquesta altra:

$$\Pi E + P' \leq R\beta\nu.$$

Si fem una consideració anàloga per a la luminescència catòdica, que representa el procés invers al que hem considerat, obtenim:

$$\Pi E + P' \geq R\beta\nu.$$

En el cas de les substàncies investigades per Lenard, ΠE^* és sempre significativament més elevat que $R\beta\nu$, perquè la tensió que han

⁹P. LENARD, *Annalen der Physik*, **8**, 165 i 184, taula 1, figura 2 (1902).

¹⁰P. LENARD, loc. cit. 150 i 166-168.

*En l'original figura per error PE .

d'haver superat els raigs catòdics només per poder generar llum visible arriba en alguns casos a centenars de volts i, en d'altres, a milers de volts.¹¹

Hem de suposar, per tant, que l'energia cinètica d'un electró es fa servir per generar molts quàntums d'energia lumínica.

§9. Sobre la ionització dels gasos mitjançant llum ultraviolada

Suposarem que, en la ionització d'un gas mitjançant la llum ultraviolada, cada quàntum d'energia de llum absorbit serveix per ionitzar una molècula de gas. D'aquí es desprèn, en primer lloc, que el treball d'ionització (és a dir, el treball teòricament necessari per dur a terme la ionització) d'una molècula no pot ser més gran que l'energia d'un quàntum d'energia lumínica absorbit. Si el treball (teòric) d'ionització per equivalent gram el denominem J , aleshores tenim:

$$R\beta\nu \geq J.$$

Segons les mesures de Lenard, però, la longitud d'ona efectiva més gran per l'aire és aproximadament $1,9 \cdot 10^{-5}$ cm. Per tant:

$$R\beta\nu = 6,4 \cdot 10^{12} \text{ erg} \geq J.$$

Un límit superior per al treball d'ionització s'obté també a partir dels potencials d'ionització de gasos rarificats. Segons J. Stark,¹² el potencial d'ionització més baix mesurat (en ànodes de platí) per l'aire és aproximadament de 10 V.¹³ Per tant, el límit superior de J se situa en $9,6 \cdot 10^{12}$, que és gairebé igual que el que acabem d'establir. D'aquí es desprèn una altra conseqüència, la comprovació experimental de la qual em sembla de gran importància. Si cada quàntum d'energia lumínica absorbida ionitza una molècula,

¹¹P. LENARD, *Annalen der Physik*, **12**, 469 (1903).

¹²J. STARK, *Die Elektrizität in Gasen*, 57. Leipzig, 1902.

¹³En l'interior del gas, la tensió d'ionització dels ions negatius és, d'altra banda, cinc vegades superior.

aleshores hi ha una relació entre la quantitat de llum absorbida L i el nombre j de molècules gram ionitzades per la primera:

$$j = \frac{L}{R\beta\nu}.$$

Si la nostra concepció es correspon amb la realitat, aquesta relació ha de ser vàlida per a qualsevol gas que (en la freqüència corresponent) no presenti cap absorció apreciable sense que l'acompanyi una ionització.

«Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt»

Annalen der Physik, **17**, 132–148 (1905).

Datat: Berna, 17 de març de 1905.

Rebut: 18 de març de 1905.

Publicat: 9 de juny de 1905.

6. *Über einen
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;
von A. Einstein.*

Zwischen den theoretischen Vorstellungen, welche sich die Physiker über die Gase und andere ponderable Körper gebildet haben, und der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Prozesse im sogenannten leeren Raume besteht ein tiefgreifender formaler Unterschied. Während wir uns nämlich den Zustand eines Körpers durch die Lagen und Geschwindigkeiten einer zwar sehr großen, jedoch endlichen Anzahl von Atomen und Elektronen für vollkommen bestimmt ansehen, bedienen wir uns zur Bestimmung des elektromagnetischen Zustandes eines Raumes kontinuierlicher räumlicher Funktionen, so daß also eine endliche Anzahl von Größen nicht als genügend anzusehen ist zur vollständigen Festlegung des elektromagnetischen Zustandes eines Raumes. Nach der Maxwellschen Theorie ist bei allen rein elektromagnetischen Erscheinungen, also auch beim Licht, die Energie als kontinuierliche Raumbfunktion aufzufassen, während die Energie eines ponderabeln Körpers nach der gegenwärtigen Auffassung der Physiker als eine über die Atome und Elektronen erstreckte Summe darzustellen ist. Die Energie eines ponderabeln Körpers kann nicht in beliebig viele, beliebig kleine Teile zerfallen, während sich die Energie eines von einer punktförmigen Lichtquelle ausgesandten Lichtstrahles nach der Maxwellschen Theorie (oder allgemeiner nach jeder Undulationstheorie) des Lichtes auf ein stets wachsendes Volumen sich kontinuierlich verteilt.

Die mit kontinuierlichen Raumbfunktionen operierende Undulationstheorie des Lichtes hat sich zur Darstellung der rein optischen Phänomene vortrefflich bewährt und wird wohl nie durch eine andere Theorie ersetzt werden. Es ist jedoch im Auge zu behalten, daß sich die optischen Beobachtungen auf zeitliche Mittelwerte, nicht aber auf Momentanwerte beziehen, und es ist trotz der vollständigen Bestätigung der Theorie der Beugung, Reflexion, Brechung, Dispersion etc. durch das

Experiment wohl denkbar, daß die mit kontinuierlichen Raumfunktionen operierende Theorie des Lichtes zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt, wenn man sie auf die Erscheinungen der Lichterzeugung und Lichtverwandlung anwendet.

Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die „schwarze Strahlung“, Photolumineszenz, die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.

Im folgenden will ich den Gedankengang mitteilen und die Tatsachen anführen, welche mich auf diesen Weg geführt haben, in der Hoffnung, daß der darzulegende Gesichtspunkt sich einigen Forschern bei ihren Untersuchungen als brauchbar erweisen möge.

§ 1. Über eine die Theorie der „schwarzen Strahlung“ betreffende Schwierigkeit.

Wir stellen uns zunächst auf den Standpunkt der Maxwell'schen Theorie und Elektronentheorie und betrachten folgenden Fall. In einem von vollkommen reflektierenden Wänden eingeschlossenen Raumes befinde sich eine Anzahl Gasmoleküle und Elektronen, welche freibeweglich sind und aufeinander konservative Kräfte ausüben, wenn sie einander sehr nahe kommen, d. h. miteinander wie Gasmoleküle nach der kinetischen Gastheorie zusammenstoßen können.¹⁾ Eine Anzahl

1) Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, daß die mittleren kinetischen Energien von Gasmolekülen und Elektronen bei Temperaturgleichgewicht einander gleich seien. Mit Hilfe letzterer Voraussetzung hat Hr. Drude bekanntlich das Verhältnis von thermischem und elektrischem Leitungsvermögen der Metalle auf theoretischem Wege abgeleitet.

Elektronen sei ferner an voneinander weit entfernte Punkte des Raumes gekettet durch nach diesen Punkten gerichtete, den Elongationen proportionale Kräfte. Auch diese Elektronen sollen mit den freien Molekülen und Elektronen in konservative Wechselwirkung treten, wenn ihnen letztere sehr nahe kommen. Wir nennen die an Raumpunkte geketteten Elektronen „Resonatoren“; sie senden elektromagnetische Wellen bestimmter Periode aus und absorbieren solche.

Nach der gegenwärtigen Ansicht über die Entstehung des Lichtes müßte die Strahlung im betrachteten Raume, welche unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie für den Fall des dynamischen Gleichgewichtes gefunden wird, mit der „schwarzen Strahlung“ identisch sein — wenigstens wenn Resonatoren aller in Betracht zu ziehenden Frequenzen als vorhanden angesehen werden.

Wir sehen vorläufig von der von den Resonatoren emittierten und absorbierten Strahlung ab und fragen nach der Wechselwirkung (den Zusammenstößen) von Molekülen und Elektronen entsprechenden Bedingung für das dynamische Gleichgewicht. Die kinetische Gastheorie liefert für letzteres die Bedingung, daß die mittlere lebendige Kraft eines Resonatorelektrons gleich der mittleren kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung eines Gasmoleküles sein muß. Zerlegen wir die Bewegung des Resonatorelektrons in drei aufeinander senkrechte Schwingungsbewegungen, so finden wir für den Mittelwert $\bar{E}$ der Energie einer solchen geradlinigen Schwingungsbewegung

$$\bar{E} = \frac{R}{N} T,$$

wobei R die absolute Gaskonstante, N die Anzahl der „wirklichen Moleküle“ in einem Grammäquivalent und T die absolute Temperatur bedeutet. Die Energie $\bar{E}$ ist nämlich wegen der Gleichheit der zeitlichen Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie des Resonators $\frac{2}{3}$ mal so groß wie die lebendige Kraft eines freien, einatomigen Gasmoleküles. Würde nun durch irgend eine Ursache — in unserem Falle durch Strahlungsvorgänge — bewirkt, daß die Energie eines Resonators einen größeren oder kleineren zeitlichen Mittelwert als $\bar{E}$ besitzt, so würden die Zusammenstöße mit den freien Elek-

tronen und Molekülen zu einer im Mittel von Null verschiedenen Energieabgabe an das Gas bez. Energieaufnahme von dem Gas führen. Es ist also in dem von uns betrachteten Falle dynamisches Gleichgewicht nur dann möglich, wenn jeder Resonator die mittlere Energie $\bar{E}$ besitzt.

Eine ähnliche Überlegung machen wir jetzt bezüglich der Wechselwirkung der Resonatoren und der im Raume vorhandenen Strahlung. Hr. Planck hat für diesen Fall die Bedingung des dynamischen Gleichgewichtes abgeleitet¹⁾ unter der Voraussetzung, daß die Strahlung als ein denkbar ungeordneter Prozeß²⁾ betrachtet werden kann. Er fand:

$$\bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2} \varrho_\nu.$$

$\bar{E}_\nu$ ist hierbei die mittlere Energie eines Resonators von der Eigenfrequenz ν (pro Schwingungskomponente), L die Lichtgeschwindigkeit, ν die Frequenz und $\varrho_\nu d\nu$ die Energie pro Volumeinheit desjenigen Teiles der Strahlung, dessen Schwingungszahl zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 99. 1900.

2) Diese Voraussetzung läßt sich folgendermaßen formulieren. Wir entwickeln die Z -Komponente der elektrischen Kraft (Z) in einem beliebigen Punkte des betreffenden Raumes zwischen den Zeitgrenzen $t=0$ und $t=T$ (wobei T eine relativ zu allen in Betracht zu ziehenden Schwingungsdauern sehr große Zeit bedeute) in eine Fouriersche Reihe

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \sin \left(2\pi\nu \frac{t}{T} + \alpha_\nu \right),$$

wobei $A_\nu \geq 0$ und $0 \leq \alpha_\nu \leq 2\pi$. Denkt man sich in demselben Raumpunkte eine solche Entwicklung beliebig oft bei zufällig gewählten Anfangspunkten der Zeit ausgeführt, so wird man für die Größen A_ν und α_ν verschiedene Wertsysteme erhalten. Es existieren dann für die Häufigkeit der verschiedenen Wertekombinationen der Größen A_ν und α_ν (statistische) Wahrscheinlichkeiten dW von der Form:

$$dW = f(A_1 A_2 \dots \alpha_1 \alpha_2 \dots) dA_1 dA_2 \dots d\alpha_1 d\alpha_2 \dots$$

Die Strahlung ist dann eine denkbar ungeordnetste, wenn

$$f(A_1, A_2 \dots \alpha_1, \alpha_2 \dots) = F_1(A_1) F_2(A_2) \dots f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) \dots,$$

d. h. wenn die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes einer der Größen A bez. α von den Werten, welche die anderen Größen A bez. α besitzen, unabhängig ist. Mit je größerer Annäherung die Bedingung erfüllt ist, daß die einzelnen Paare von Größen A_ν und α_ν von Emissions- und Absorptionsprozessen *besonderer* Resonatorengruppen abhängen, mit desto größerer Annäherung wird also in dem von uns betrachteten Falle die Strahlung als eine „denkbar ungeordnetste“ anzusehen sein.

Soll die Strahlungsenergie von der Frequenz ν nicht beständig im Ganzen weder vermindert noch vermehrt werden, so muß gelten:

$$\frac{R}{N} T = E = E_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^3} \varrho_\nu,$$

$$\varrho_\nu = \frac{R}{N} \frac{8\pi\nu^3}{L^3} T.$$

Diese als Bedingung des dynamischen Gleichgewichtes gefundene Beziehung entbehrt nicht nur der Übereinstimmung mit der Erfahrung, sondern sie besagt auch, daß in unserem Bilde von einer bestimmten Energieverteilung zwischen Äther und Materie nicht die Rede sein kann. Je weiter nämlich der Schwingungszahlenbereich der Resonatoren gewählt wird, desto größer wird die Strahlungsenergie des Raumes, und wir erhalten in der Grenze

$$\int_0^\infty \varrho_\nu d\nu = \frac{R}{N} \frac{8\pi}{L^3} T \int_0^\infty \nu^3 d\nu = \infty.$$

§ 2. Über die Plancksche Bestimmung der Elementarquanta.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß die von Hrn. Planck gegebene Bestimmung der Elementarquanta von der von ihm aufgestellten Theorie der „schwarzen Strahlung“ bis zu einem gewissen Grade unabhängig ist.

Die allen bisherigen Erfahrungen genügende Plancksche Formel¹⁾ für ϱ_ν lautet

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1},$$

wobei

$$\alpha = 6,10 \cdot 10^{-56},$$

$$\beta = 4,866 \cdot 10^{-11}.$$

Für große Werte von T/ν , d. h. für große Wellenlängen und Strahlungsdichten geht diese Formel in der Grenze in folgende über:

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha}{\beta} \nu^3 T.$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 561. 1901.

Man erkennt, daß diese Formel mit der in § 1 aus der Maxwell'schen und der Elektronentheorie entwickelten übereinstimmt. Durch Gleichsetzung der Koeffizienten beider Formeln erhält man:

$$\frac{R}{N} \frac{8\pi}{L^3} = \frac{\alpha}{\beta}$$

oder

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \frac{8\pi R}{L^3} = 6,17 \cdot 10^{23},$$

d. h. ein Atom Wasserstoff wiegt $1/N$ Gramm $= 1,62 \cdot 10^{-24}$ g. Dies ist genau der von Hrn. Planck gefundene Wert, welcher mit den auf anderen Wegen gefundenen Werten für diese Größe befriedigend übereinstimmt.

Wir gelangen daher zu dem Schlusse: Je größer die Energiedichte und die Wellenlänge einer Strahlung ist, als um so brauchbarer erweisen sich die von uns benutzten theoretischen Grundlagen; für kleine Wellenlängen und kleine Strahlungsdichten aber versagen dieselben vollständig.

Im folgenden soll die „schwarze Strahlung“ im Anschluß an die Erfahrung ohne Zugrundelegung eines Bildes über die Erzeugung und Ausbreitung der Strahlung betrachtet werden.

§ 3. Über die Entropie der Strahlung.

Die folgende Betrachtung ist in einer berühmten Arbeit des Hrn. W. Wien enthalten und soll hier nur der Vollständigkeit halber Platz finden.

Es liege eine Strahlung vor, welche das Volumen v einnehme. Wir nehmen an, daß die wahrnehmbaren Eigenschaften der vorliegenden Strahlung vollkommen bestimmt seien, wenn die Strahlungsdichte $\varrho(v)$ für alle Frequenzen gegeben ist.¹⁾ Da Strahlungen von verschiedenen Frequenzen als ohne Arbeitsleistung und ohne Wärmezufuhr voneinander trennbar anzusehen sind, so ist die Entropie der Strahlung in der Form

$$S = v \int_0^{\infty} \varphi(\varrho, v) d v$$

darstellbar, wobei φ eine Funktion der Variablen ϱ und v

1) Diese Annahme ist eine willkürliche. Man wird naturgemäß an dieser einfachsten Annahme so lange festhalten, als nicht das Experiment dazu zwingt, sie zu verlassen.

bedeutet. Es kann φ auf eine Funktion von nur einer Variablen reduziert werden durch Formulierung der Aussage, daß durch adiabatische Kompression einer Strahlung zwischen spiegelnden Wänden, deren Entropie nicht geändert wird. Wir wollen jedoch hierauf nicht eintreten, sondern sogleich untersuchen, wie die Funktion φ aus dem Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers ermittelt werden kann.

Bei der „schwarzen Strahlung“ ist φ eine solche Funktion von ν , daß die Entropie bei gegebener Energie ein Maximum ist, d. h. daß

$$\delta \int_0^{\infty} \varphi(\varrho, \nu) d\nu = 0,$$

wenn

$$\delta \int_0^{\infty} \varrho d\nu = 0.$$

Hieraus folgt, daß für jede Wahl des $\delta \varrho$ als Funktion von ν

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \lambda \right) \delta \varrho d\nu = 0,$$

wobei λ von ν unabhängig ist. Bei der schwarzen Strahlung ist also $\partial \varphi / \partial \varrho$ von ν unabhängig.

Für die Temperaturzunahme einer schwarzen Strahlung vom Volumen $\nu = 1$ um dT gilt die Gleichung:

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho d\nu,$$

oder, da $\partial \varphi / \partial \varrho$ von ν unabhängig ist:

$$dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} dE.$$

Da dE gleich der zugeführten Wärme und der Vorgang umkehrbar ist, so gilt auch:

$$dS = \frac{1}{T} dE.$$

Durch Vergleich erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{T}.$$

Dies ist das Gesetz der schwarzen Strahlung. Man kann also

aus der Funktion φ das Gesetz der schwarzen Strahlung und umgekehrt aus letzterem die Funktion φ durch Integration bestimmen mit Rücksicht darauf, daß φ für $\rho = 0$ verschwindet.

§ 4. Grenzesetz für die Entropie der monochromatischen Strahlung bei geringer Strahlungsdichte.

Aus den bisherigen Beobachtungen über die „schwarze Strahlung“ geht zwar hervor, daß das ursprünglich von Hrn. W. Wien für die „schwarze Strahlung“ aufgestellte Gesetz

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

nicht genau gültig ist. Dasselbe wurde aber für große Werte von ν/T sehr vollkommen durch das Experiment bestätigt. Wir legen diese Formel unseren Rechnungen zugrunde, behalten aber im Sinne, daß unsere Resultate nur innerhalb gewisser Grenzen gelten.

Aus dieser Formel ergibt sich zunächst:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta \nu} \lg \frac{\rho}{\alpha \nu^3}$$

und weiter unter Benutzung der in dem vorigen Paragraphen gefundenen Beziehung:

$$\varphi(\rho, \nu) = -\frac{\rho}{\beta \nu} \left\{ \lg \frac{\rho}{\alpha \nu^3} - 1 \right\}.$$

Es sei nun eine Strahlung von der Energie E gegeben, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt. Die Strahlung nehme das Volumen v ein. Die Entropie dieser Strahlung ist:

$$S = v \varphi(\rho, \nu) d\nu = -\frac{E}{\beta \nu} \left\{ \lg \frac{E}{v \alpha \nu^3 d\nu} - 1 \right\}.$$

Beschränken wir uns darauf, die Abhängigkeit der Entropie von dem von der Strahlung eingenommenen Volumen zu untersuchen, und bezeichnen wir die Entropie der Strahlung mit S_0 , falls dieselbe das Volumen v_0 besitzt, so erhalten wir:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta \nu} \lg \left(\frac{v}{v_0} \right).$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Entropie einer monochromatischen Strahlung von genügend kleiner Dichte nach dem gleichen Gesetze mit dem Volumen variiert wie die Entropie eines idealen Gases oder die einer verdünnten Lösung. Die

soeben gefundene Gleichung soll im folgenden interpretiert werden unter Zugrundelegung des von Hrn. Boltzmann in die Physik eingeführten Prinzips, nach welchem die Entropie eines Systems eine Funktion der Wahrscheinlichkeit seines Zustandes ist.

§ 5. Molekulartheoretische Untersuchung der Abhängigkeit der Entropie von Gasen und verdünnten Lösungen vom Volumen.

Bei Berechnung der Entropie auf molekulartheoretischem Wege wird häufig das Wort „Wahrscheinlichkeit“ in einer Bedeutung angewendet, die sich nicht mit der Definition der Wahrscheinlichkeit deckt, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben wird. Insbesondere werden die „Fälle gleicher Wahrscheinlichkeit“ häufig hypothetisch festgesetzt in Fällen, wo die angewendeten theoretischen Bilder bestimmt genug sind, um statt jener hypothetischen Festsetzung eine Deduktion zu geben. Ich will in einer besonderen Arbeit zeigen, daß man bei Betrachtungen über thermische Vorgänge mit der sogenannten „statistischen Wahrscheinlichkeit“ vollkommen auskommt und hoffe dadurch eine logische Schwierigkeit zu beseitigen, welche der Durchführung des Boltzmannschen Prinzips noch im Wege steht. Hier aber soll nur dessen allgemeine Formulierung und dessen Anwendung auf ganz spezielle Fälle gegeben werden.

Wenn es einen Sinn hat, von der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes eines Systems zu reden, wenn ferner jede Entropiezunahme als ein Übergang zu einem wahrscheinlicheren Zustande aufgefaßt werden kann, so ist die Entropie S_1 eines Systems eine Funktion der Wahrscheinlichkeit W_1 seines momentanen Zustandes. Liegen also zwei nicht miteinander in Wechselwirkung stehende Systeme S_1 und S_2 vor, so kann man setzen:

$$S_1 = \varphi_1(W_1),$$

$$S_2 = \varphi_2(W_2).$$

Betrachtet man diese beiden Systeme als ein einziges System von der Entropie S und der Wahrscheinlichkeit W , so ist:

$$S = S_1 + S_2 = \varphi(W)$$

und

$$W = W_1 \cdot W_2.$$

Die letztere Beziehung sagt aus, daß die Zustände der beiden Systeme voneinander unabhängige Ereignisse sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varphi(W_1 \cdot W_2) = \varphi_1(W_1) + \varphi_2(W_2)$$

und hieraus endlich

$$\varphi_1(W_1) = C \lg(W_1) + \text{konst.},$$

$$\varphi_2(W_2) = C \lg(W_2) + \text{konst.},$$

$$\varphi(W) = C \lg(W) + \text{konst.}$$

Die Größe C ist also eine universelle Konstante; sie hat, wie aus der kinetischen Gastheorie folgt, den Wert R/N , wobei den Konstanten R und N dieselbe Bedeutung wie oben beizulegen ist. Bedeutet S_0 die Entropie bei einem gewissen Anfangszustande eines betrachteten Systems und W die relative Wahrscheinlichkeit eines Zustandes von der Entropie S , so erhalten wir also allgemein:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W.$$

Wir behandeln zunächst folgenden Spezialfall. In einem Volumen v_0 sei eine Anzahl (n) beweglicher Punkte (z. B. Moleküle) vorhanden, auf welche sich unsere Überlegung beziehen soll. Außer diesen können in dem Raume noch beliebig viele andere bewegliche Punkte irgendwelcher Art vorhanden sein. Über das Gesetz, nach dem sich die betrachteten Punkte in dem Raume bewegen, sei nichts vorausgesetzt, als daß in bezug auf diese Bewegung kein Raumteil (und keine Richtung) von den anderen ausgezeichnet sei. Die Anzahl der betrachteten (ersterwähnten) beweglichen Punkte sei ferner so klein, daß von einer Wirkung der Punkte aufeinander abgesehen werden kann.

Dem betrachteten System, welches z. B. ein ideales Gas oder eine verdünnte Lösung sein kann, kommt eine gewisse Entropie S_0 zu. Wir denken uns einen Teil des Volumens v_0 von der Größe v und alle n beweglichen Punkte in das Volumen v versetzt, ohne daß an dem System sonst etwas geändert wird. Diesem Zustand kommt offenbar ein anderer Wert der Entropie (S) zu, und wir wollen nun die Entropiedifferenz mit Hilfe des Boltzmannschen Prinzips bestimmen.

Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des letzterwähnten Zustandes relativ zum ursprünglichen? Oder: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem zufällig herausgegriffenen Zeitmoment alle n in einem gegebenen Volumen v_0 unabhängig voneinander beweglichen Punkte (zufällig) in dem Volumen v befinden?

Für diese Wahrscheinlichkeit, welche eine „statistische Wahrscheinlichkeit“ ist, erhält man offenbar den Wert:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n;$$

man erhält hieraus durch Anwendung des Boltzmannschen Prinzipes:

$$S - S_0 = R \left(\frac{n}{N}\right) \lg \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Es ist bemerkenswert, daß man zur Herleitung dieser Gleichung, aus welcher das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz und das gleichlautende Gesetz des osmotischen Druckes leicht thermodynamisch ableiten kann¹⁾; keine Voraussetzung über das Gesetz zu machen braucht, nachdem sich die Moleküle bewegen.

§ 6. Interpretation des Ausdrucks für die Abhängigkeit der Entropie der monochromatischen Strahlung vom Volumen nach dem Boltzmannschen Prinzip.

Wir haben in § 4 für die Abhängigkeit der Entropie der monochromatischen Strahlung vom Volumen den Ausdruck gefunden:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta v} \lg \left(\frac{v}{v_0}\right);$$

Schreibt man diese Formel in der Gestalt:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{N}{R} \frac{E}{\beta v}} \right]$$

1) Ist E die Energie des Systems, so erhält man:

$$-d(E - TS) = p dv = TdS = R \frac{n}{N} \frac{dv}{v};$$

also

$$pv = R \frac{n}{N} T.$$

und vergleicht man sie mit der allgemeinen, das Boltzmannsche Prinzip ausdrückenden Formel

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W$$

so gelangt man zu folgendem Schluß:

Ist monochromatische Strahlung von der Frequenz ν und der Energie E in das Volumen v_0 (durch spiegelnde Wände) eingeschlossen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig herausgegriffenen Zeitmoment die ganze Strahlungsenergie in dem Teilvolumen v des Volumens v_0 befindet:

$$W = \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{N}{R} \frac{E}{\beta \nu}}.$$

Hieraus schließen wir weiter:

Monochromatische Strahlung von geringer Dichte (innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Wienschen Strahlungsformel) verhält sich in wärmetheoretischer Beziehung so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten von der Größe $R\beta\nu/N$ bestünde.

Wir wollen noch die mittlere Größe der Energiequanten der „schwarzen Strahlung“ mit der mittleren lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung eines Moleküls bei der nämlichen Temperatur vergleichen. Letztere ist $\frac{3}{2}(R/N)T$, während man für die mittlere Größe des Energiequantums unter Zugrundelegung der Wienschen Formel erhält:

$$\frac{\int_0^{\infty} \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{N}{R\beta \nu} \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta \nu}{T}} d\nu} = 3 \frac{R}{N} T$$

Wenn sich nun monochromatische Strahlung (von hinreichend kleiner Dichte) bezüglich der Abhängigkeit der Entropie vom Volumen wie ein diskontinuierliches Medium verhält, welches aus Energiequanten von der Größe $R\beta\nu/N$ besteht, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob auch die Gesetze der

Erzeugung und Verwandlung des Lichtes so beschaffen sind, wie wenn das Licht aus derartigen Energiequanten bestünde. Mit dieser Frage wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

§ 7. Über die Stokessche Regel.

Es werde monochromatisches Licht durch Photolumineszenz in Licht anderer Frequenz verwandelt und gemäß dem eben erlangten Resultat angenommen, daß sowohl das erzeugende wie das erzeugte Licht aus Energiequanten von der Größe $(R/N)\beta\nu$ bestehe, wobei ν die betreffende Frequenz bedeutet. Der Verwandlungsprozeß wird dann folgendermaßen zu deuten sein. Jedes erzeugende Energiequant von der Frequenz ν_1 wird absorbiert und gibt — wenigstens bei genügend kleiner Verteilungsdichte der erzeugenden Energiequanten — für sich allein Anlaß zur Entstehung eines Lichtquants von der Frequenz ν_2 ; eventuell können bei der Absorption des erzeugenden Lichtquants auch gleichzeitig Lichtquanten von den Frequenzen ν_3, ν_4 etc. sowie Energie anderer Art (z. B. Wärme) entstehen. Unter Vermittelung von was für Zwischenprozessen dies Endresultat zustande kommt, ist gleichgültig. Wenn die photolumineszierende Substanz nicht als eine beständige Quelle von Energie anzusehen ist, so kann nach dem Energieprinzip die Energie eines erzeugten Energiequants nicht größer sein als die eines erzeugenden Lichtquants; es muß also die Bezeichnung gelten:

$$\frac{R}{N} \beta \nu_2 \leq \frac{R}{N} \beta \nu_1$$

oder

$$\nu_2 \leq \nu_1.$$

Dies ist die bekannte Stokessche Regel.

Besonders hervorzuheben ist, daß bei schwacher Belichtung die erzeugte Lichtmenge der erregenden unter sonst gleichen Umständen nach unserer Auffassung der erregenden Lichtstärke proportional sein muß, da jedes erregende Energiequant einen Elementarprozeß von der oben angedeuteten Art verursachen wird, unabhängig von der Wirkung der anderen erregenden Energiequanten. Insbesondere wird es keine untere Grenze für die Intensität des erregenden Lichtes geben, unterhalb welcher das Licht unfähig wäre, lichterregend zu wirken.

Abweichungen von der Stokesschen Regel sind nach der dargelegten Auffassung der Phänomene in folgenden Fällen denkbar:

1. wenn die Anzahl der gleichzeitig in Umwandlung begriffenen Energiequanten pro Volumeneinheit so groß ist, daß ein Energiequant des erzeugten Lichtes seine Energie von mehreren erzeugenden Energiequanten erhalten kann;

2. wenn das erzeugende (oder erzeugte) Licht nicht von derjenigen energetischen Beschaffenheit ist, die einer „schwarzen Strahlung“ aus dem Gültigkeitsbereich des Wienschen Gesetzes zukommt, wenn also z. B. das erregende Licht von einem Körper so hoher Temperatur erzeugt ist, daß für die in Betracht kommende Wellenlänge das Wiensche Gesetz nicht mehr gilt.

Die letztgenannte Möglichkeit verdient besonderes Interesse. Nach der entwickelten Auffassung ist es nämlich nicht ausgeschlossen, daß eine „nicht Wiensche Strahlung“ auch in großer Verdünnung sich in energetischer Beziehung anders verhält als eine „schwarze Strahlung“ aus dem Gültigkeitsbereich des Wienschen Gesetzes.

§ 8. Über die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Belichtung fester Körper.

Die übliche Auffassung, daß die Energie des Lichtes kontinuierlich über den durchstrahlten Raum verteilt sei, findet bei dem Versuch, die lichtelektrischen Erscheinungen zu erklären, besonders große Schwierigkeiten, welche in einer bahnbrechenden Arbeit von Hrn. Lenard dargelegt sind.¹⁾

Nach der Auffassung, daß das erregende Licht aus Energiequanten von der Energie $(R/N)\beta v$ bestehe, läßt sich die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Licht folgendermaßen auffassen. In die oberflächliche Schicht des Körpers dringen Energiequanten ein, und deren Energie verwandelt sich wenigstens zum Teil in kinetische Energie von Elektronen. Die einfachste Vorstellung ist die, daß ein Lichtquant seine ganze Energie an ein einziges Elektron abgibt; wir wollen annehmen, daß dies vorkomme. Es soll jedoch nicht ausgeschlossen sein, daß Elektronen die Energie von Lichtquanten nur teilweise aufnehmen. Ein im Innern des Körpers mit kinetischer Energie

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 169 u. 170. 1902.

versehenes Elektron wird, wenn es die Oberfläche erreicht hat, einen Teil seiner kinetischen Energie eingebüßt haben. Außerdem wird anzunehmen sein, daß jedes Elektron beim Verlassen des Körpers eine (für den Körper charakteristische) Arbeit P zu leisten hat, wenn es den Körper verläßt. Mit der größten Normalgeschwindigkeit werden die unmittelbar an der Oberfläche normal zu dieser erregten Elektronen den Körper verlassen. Die kinetische Energie solcher Elektronen ist

$$\frac{R}{N} \beta v - P.$$

Ist der Körper zum positiven Potential Π geladen und von Leitern vom Potential Null umgeben und ist Π eben imstande, einen Elektrizitätsverlust des Körpers zu verhindern, so muß sein:

$$\Pi \varepsilon = \frac{R}{N} \beta v - P,$$

wobei ε die elektrische Masse des Elektrons bedeutet, oder

$$\Pi E = R \beta v - P',$$

wobei E die Ladung eines Grammäquivalentes eines einwertigen Ions und P' das Potential dieser Menge negativer Elektrizität in bezug auf den Körper bedeutet.¹⁾

Setzt man $E = 9,6 \cdot 10^8$, so ist $\Pi \cdot 10^{-8}$ das Potential in Volts, welches der Körper bei Bestrahlung im Vakuum annimmt.

Um zunächst zu sehen, ob die abgeleitete Beziehung der Größenordnung nach mit der Erfahrung übereinstimmt, setzen wir $P' = 0$, $v = 1,03 \cdot 10^{16}$ (entsprechend der Grenze des Sonnenspektrums nach dem Ultraviolett hin) und $\beta = 4,866 \cdot 10^{-11}$. Wir erhalten $\Pi \cdot 10^7 = 4,3$ Volt, welches Resultat der Größenordnung nach mit den Resultaten von Hrn. Lenard übereinstimmt.²⁾

Ist die abgeleitete Formel richtig, so muß Π , als Funktion der Frequenz des erregenden Lichtes in kartesischen Koordinaten dargestellt, eine Gerade sein, deren Neigung von der Natur der untersuchten Substanz unabhängig ist.

1) Nimmt man an, daß das einzelne Elektron durch das Licht aus einem neutralen Molekül unter Aufwand einer gewissen Arbeit losgelöst werden muß, so hat man an der abgeleiteten Beziehung nichts zu ändern; nur ist dann P' als Summe von zwei Summanden aufzufassen.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 165 u. 184. Taf. I, Fig. 2. 1902.

Mit den von Hrn. Lenard beobachteten Eigenschaften der lichtelektrischen Wirkung steht unsere Auffassung, soweit ich sehe, nicht im Widerspruch. Wenn jedes Energiequant des erregenden Lichtes unabhängig von allen übrigen seine Energie an Elektronen abgibt, so wird die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, d. h. die Qualität der erzeugten Kathodenstrahlung von der Intensität des erregenden Lichtes unabhängig sein; andererseits wird die Anzahl der den Körper verlassenden Elektronen der Intensität des erregenden Lichtes unter sonst gleichen Umständen proportional sein.¹⁾

Über die mutmaßlichen Gültigkeitsgrenzen der erwähnten Gesetzmäßigkeiten wären ähnliche Bemerkungen zu machen wie bezüglich der mutmaßlichen Abweichungen von der Stokes'schen Regel.

Im vorstehenden ist angenommen, daß die Energie wenigstens eines Teiles der Energiequanten des erzeugenden Lichtes je an ein einziges Elektron vollständig abgegeben werde. Macht man diese naheliegende Voraussetzung nicht, so erhält man statt obiger Gleichung die folgende:

$$hE + P' \leq R\beta\nu.$$

Für die Kathodenlumineszenz, welche den inversen Vorgang zu dem eben betrachteten bildet, erhält man durch eine der durchgeführten analoge Betrachtung:

$$hE + P' \geq R\beta\nu.$$

Bei den von Hrn. Lenard untersuchten Substanzen ist PE stets bedeutend größer als $R\beta\nu$, da die Spannung, welche die Kathodenstrahlen durchlaufen haben müssen, um eben sichtbares Licht erzeugen zu können, in einigen Fällen einige Hundert, in anderen Tausende von Volts beträgt.²⁾ Es ist also anzunehmen, daß die kinetische Energie eines Elektrons zur Erzeugung vieler Lichtenergiequanten verwendet wird.

§ 9. Über die Ionisierung der Gase durch ultraviolettes Licht.

Wir werden anzunehmen haben, daß bei der Ionisierung eines Gases durch ultraviolettes Licht je ein absorbiertes Licht-

1) P. Lenard, l. c. p. 150 und p. 166—168.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 469. 1903.

energiequant zur Ionisierung je eines Gasmoleküles verwendet wird. Hieraus folgt zunächst, daß die Ionisierungsarbeit (d. h. die zur Ionisierung theoretisch nötige Arbeit) eines Moleküles nicht größer sein kann als die Energie eines absorbierten wirksamen Lichtenergiequant. Bezeichnet man mit J die (theoretische) Ionisierungsarbeit pro Grammäquivalent, so muß also sein:

$$R\beta\nu \geq J.$$

Nach Messungen Lenards ist aber die größte wirksame Wellenlänge für Luft ca. $1,9 \cdot 10^{-5}$ cm, also

$$R\beta\nu = 6,4 \cdot 10^{13} \text{ Erg} \geq J.$$

Eine obere Grenze für die Ionisierungsarbeit gewinnt man auch aus den Ionisierungsspannungen in verdünnten Gasen. Nach J. Stark¹⁾ ist die kleinste gemessene Ionisierungsspannung (an Platinanoden) für Luft ca. 10 Volt.²⁾ Es ergibt sich also für J die obere Grenze $9,6 \cdot 10^{13}$, welche nahezu gleich der eben gefundenen ist. Es ergibt sich noch eine andere Konsequenz, deren Prüfung durch das Experiment mir von großer Wichtigkeit zu sein scheint. Wenn jedes absorbierte Lichtenergiequant ein Molekül ionisiert, so muß zwischen der absorbierten Lichtmenge L und der Anzahl j der durch dieselbe ionisierten Grammmoleküle die Beziehung bestehen:

$$j = \frac{L}{R\beta\nu}.$$

Diese Beziehung muß, wenn unsere Auffassung der Wirklichkeit entspricht, für jedes Gas gelten, welches (bei der betreffenden Frequenz) keine merkliche nicht von Ionisation begleitete Absorption aufweist.

Bern, den 17. März 1905.

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 57. Leipzig 1902.

2) Im Gasinnern ist die Ionisierungsspannung für negative Ionen allerdings fünfmal größer.

(Eingegangen 18. März 1905.)

3 De la constitució molecular de la matèria al moviment brownià¹

3.1 Antecedents

Com vam anticipar al capítol «Un jove agosarat i feliç», Einstein va publicar el 1902 i el 1904 tres articles que constitueixen una formulació pròpia —en la línia de Boltzmann i diferent de la de Gibbs— de la mecànica estadística de l'equilibri.² En la seva autobiografia científica descriu amb nitidesa els seus objectius en aquesta direcció:³

«En no estar familiaritzat amb les investigacions de Boltzmann i Gibbs, que havien aparegut abans i que en realitat esgotaven el tema, vaig desenvolupar la mecànica estadística i la teoria cineticomolecular de la termodinàmica que s'hi basava. El meu objectiu principal consistia a trobar fets que poguessin garantir tant com fos possible l'existència d'àtoms de dimensions finites determinades. Llavors vaig descobrir que, d'acord amb la teoria atomística, hi hauria d'haver un moviment de partícules microscòpiques en suspensió obert a l'observació, sense saber que observacions concernents al moviment brownià eren conegudes des de feia temps.»

¹Entre les fonts més àmpliament consultades per a la redacció d'aquesta secció hem de destacar STACHEL (1989): «Editorial note: Einstein's dissertation on the determination of molecular dimensions», 170–182 i «Editorial note: Einstein on Brownian motion», 206–222. De vegades també s'ha recorregut al capítol 5 de PAIS (1984). Per als aspectes més concrets relatius al moviment brownià s'ha tingut molt en consideració el capítol 15 del volum 2 de BRUSH (1976). En el text se citen altres fonts més específiques si s'escau.

²Per a una anàlisi del contingut d'aquesta trilogia podeu veure NAVARRO (1990), 21–50. I per la comparació entre les respectives formulacions de Gibbs i d'Einstein, NAVARRO (1998).

³SCHILPP (1970), 46–47.

És en aquesta línia que s'han d'emmarcar les investigacions d'Einstein sobre mecànica estadística de 1905. En particular, la seva tesi doctoral, datada a Berna el 30 d'abril, presentada a la Universität Zürich el 20 de juliol, aprovada per unanimitat a la Facultat de Física i de Matemàtiques el 27 del mateix mes i publicada ja el 1906 en els *Annalen* amb uns lleugers retocs.⁴ En la seva tesi Einstein presenta un mètode original en què conjuga amb habilitat —per obtenir bons resultats— els mètodes hidrodinàmics de Stokes (física del continu) amb la teoria de Van't Hoff sobre dissolucions, segons una formulació personal basada en la teoria molecular de les dissolucions (física del discret). El mètode emprat per Einstein permetia l'obtenció de valors numèrics tant per a les dimensions de les molècules com per al *nombre d'Avogadro*.⁵

Einstein no va ser el primer d'intentar obtenir valors precisos per a totes dues quantitats. Amedeo Avogadro (1776–1856) és l'autor d'una hipòtesi, el 1811, que es pot enunciar així: en les mateixes condicions de pressió i de temperatura, volums iguals de gasos qualssevol contenen el mateix nombre de molècules. La hipòtesi va adquirir prestigi, especialment a través de la difusió que en va fer André Marie Ampère (1775–1836), a qui de vegades se li ha arribat a atribuir la paternitat de la hipòtesi. Va ser Stanislao Cannizzaro (1826–1910) qui va posar les coses al seu lloc definitivament al Primer Congrés Internacional de Química (Karlsruhe, 1860), tant respecte de l'autèntica paternitat de la hipòtesi com de la seva importància per comprendre la química dels gasos.

El nom *nombre d'Avogadro* —originalment *constant d'Avogadro*—, amb el qual s'indica el nombre de molècules contingudes

⁴EINSTEIN (1906a).

⁵Cap a la fi del segle XIX, la distinció entre àtoms i molècules no era clara en física. Nosaltres aquí utilitzarem el terme *molècula* en sentit genèric, llevat que, explícitament, els respectius autors es refereixin als àtoms. Tot i que la constitució molecular només va ser acceptada cent anys més tard, eren molts els físics i químics que en aquella època raonaven com si l'evidència de les molècules fos total.

en un mol —molècula gram— de qualsevol substància química, va ser proposat pel físic francès Jean Baptiste Perrin (1870–1942), precisament quan, el 1909, exposava la confirmació experimental de les previsions teòriques d'Einstein sobre el moviment brownià. Després de referir-se a la hipòtesi d'Avogadro afirmava:⁶

«Aquest nombre invariable N és una constant universal que sembla justificat anomenar *constant d'Avogadro*. Si es conegués aquesta constant, es coneixeria la massa d'una molècula qualsevol; es coneixeria també la massa d'un àtom qualsevol, ja que podem saber, per diferents mitjans que condueixen a fórmules químiques, quants àtoms de cada classe hi ha en cada molècula.»

Aquesta citació il·lustra de manera molt clara la importància que tenia en aquell moment, no només per a la química sinó també per a la teoria cinètica, l'adequada determinació d'aquesta constant universal, atès que representa un autèntic pont numèric entre el món microscòpic i el món macroscòpic.

Sembla que el primer a calcular el nombre de molècules en una substància gasosa va ser el químic austríac Joseph Loschmidt (1821–1895) que, mitjançant càlculs basats en la incipient teoria cinètica dels gasos, va deduir el 1865 un valor per al nombre de molècules contingudes en un centímetre cúbic de qualsevol gas, en condicions normals de pressió i de temperatura; aquest valor és conegut com a *nombre de Loschmidt*.⁷ Com que aquest es relaciona unívocament amb el nombre d'Avogadro, la determinació de qualsevol de les dues constants té la màxima importància des d'una perspectiva microscòpica, perquè relaciona el nombre de molècules amb propietats físiques de la matèria ordinària; per exemple, pot

⁶PERRIN (1909), 16.

⁷El valor actualment admès, amb quatre xifres significatives, és $2,686 \cdot 10^{19}$. En la bibliografia científica alemanya és usual referir-se al *nombre d'Avogadro* com al «*nombre de Loschmidt* per molècula gram», cosa que pot conduir de vegades a confusió.

servir per relacionar l'energia molecular amb l'energia termodinàmica d'una substància.

Tot i que en els càlculs inicials de Loschmidt abundaven els errors, si aquests es corregeixen de manera adequada el valor corresponent del nombre d'Avogadro resulta ser aproximadament de $0,43 \cdot 10^{23}$ molècules per mol.⁸ Poc després, Maxwell, amb un raonament basat en els seus propis desenvolupaments de la teoria cinètica, va trobar un valor aproximadament deu vegades més gran. La disparitat entre les diferents propostes era tan àmplia que cap al final del segle XIX es podien trobar determinacions del nombre d'Avogadro que oscil·laven entre 10^{22} i 10^{24} . A aquests resultats s'hi arribava aplicant aspectes de la teoria cinètica dels gasos a camps tan diferents com l'electricitat de contacte entre metalls, la dispersió de la llum, la radiació del cos negre i diferents fenòmens en els líquids.

Hem comentat anteriorment que Einstein ja s'havia ocupat d'alguns aspectes relacionats amb les característiques de les molècules en els treballs anteriors a 1905. Però és en la tesi doctoral on, per primer cop, presenta un mètode per calcular les dimensions d'una molècula i també el nombre d'Avogadro, al qual de fet, no es refereix mai com a tal, sinó amb expressions com ara «el nombre de molècules reals en una molècula gram» o altres de semblants. En vista de la importància que el tema tenia per a la justificació mateixa de la teoria de gasos —que constitueix el precedent de la mecànica estadística del segle XX— es comprèn l'interès inusitat d'Einstein per determinar el nombre d'Avogadro amb la precisió més gran possible.

De fet, va abordar aquest tema des de diferents perspectives al llarg del primer quart del segle XX. Per exemple, en el seu famós article de 1905 sobre els quàntums d'energia, ja dedueix el valor $6,17 \cdot 10^{23}$, obtingut a partir de la llei de radiació de Wien. En la tesi doctoral, ara recurrent a suspensions en líquids, escriu el valor $2,1 \cdot 10^{23}$. I en un suplement que acompanya la publicació del

⁸Recordem el valor actual, amb quatre xifres significatives: $6,022 \cdot 10^{23}$.

seu article als *Annalen*, Einstein proposa el valor $4,15 \cdot 10^{23}$, com el que està més d'acord amb les dades experimentals del moment sobre dissolucions de sucre en aigua, que era el cas tractat en la seva tesi doctoral. Aquest valor es va obtenir mitjançant un càlcul que contenia un error matemàtic descobert pel seu col·laborador Ludwig Hopf (1884–1939). L'oportuna correcció va portar Einstein a proposar, el 1911, el valor $6,56 \cdot 10^{23}$.⁹

Com veurem més endavant, en el seu article sobre el moviment brownià Einstein no va arribar a obtenir un valor per al nombre d'Avogadro, sinó que va proposar una fórmula l'aplicació de la qual requeria la prèvia determinació experimental dels camins lliures mitjans recorreguts per les molècules. El 1909 Perrin va publicar els resultats sobre aquest tipus d'experiments que el portaven a proposar $7,05 \cdot 10^{23}$ com «el valor més probable», en vista dels diferents resultats obtinguts segons el tipus de dissolucions emprades.¹⁰

L'altre tòpic estretament relacionat amb l'article d'Einstein que hem comentat és el de l'explicació del moviment brownià. Pot resultar interessant referir-nos a l'estat del problema abans de 1905. Robert Brown (1773–1858), un destacadíssim botànic escocès, és el que per primer cop va descriure el fenomen, el 1828, en un fulletó destinat a donar a conèixer informalment el seu descobriment i del qual no ens resistim a transcriure el títol, per com en resulta, d'explícit: *Una breu descripció de les observacions microscòpiques fetes durant els mesos de juny, juliol i agost de 1827, sobre les partícules contingudes en el pol·len de les plantes i sobre l'existència de molècules actives en cossos orgànics i inorgànics*.

En dipositar el pol·len de diferents plantes en aigua, Brown va detectar una dispersió del pol·len en molècules, cadascuna de les quals apareixia sotmesa a moviments irregulars en zig-zag directament observables al microscopi. Hem d'aclarir el sentit que els biòlegs donaven al terme *molècula* al començament del segle XIX.

⁹EINSTEIN (1911).

¹⁰PERRIN (1909), 111.

Era generalment admès que animals i plantes desenvolupaven una certa quantitat de molècules orgàniques —de gestació totalment desconeguda— amb moviment propi i que formaven part com a material primari de tots els éssers vius.¹¹

És en aquest context que cal situar l'aportació de Brown: no es va limitar a posar de manifest el moviment de partícules microscòpiques en dissolucions —cosa que, d'altra banda, ja s'havia observat moltes vegades— sinó que va dissociar aquests moviments amb les seves connotacions orgàniques anteriors.

El que certament va comprovar Brown és que tant la matèria orgànica com la inorgànica pot ser dividida en corpuscles microscòpics que, submergits en fluids, experimenten aquest curiós moviment en ziga-zaga, cosa que condueix el problema al camp de la física.

La història dels intents per explicar la natura i les propietats del moviment brownià, com es coneix des de llavors, és llarga i està bastant lligada al desenvolupament de la teoria cinètica dels gasos durant la segona meitat del segle XIX. No podia ser d'una altra manera ja que aviat es va comprovar que en el moviment de les partícules, a més de les dimensions, la calor desenvolupava un paper important. Remetem el lector interessat en aquesta història a la bibliografia oportuna.¹² Com a resum de l'estat del problema quan Einstein el va afrontar, reproduïm aquí les paraules que Henri Poincaré (1854–1912) va dedicar a aquesta qüestió, durant la seva intervenció al Congrés d'Arts i Ciències celebrat a Saint Louis, el setembre de 1904:¹³

«El biòleg, armat amb el seu microscopi, fa temps que
va trobar en les seves preparacions moviments desorde-

¹¹ Òbviament la teoria cel·lular, que apareixeria el 1839, va acabar de manera radical amb aquestes idees sobre les *molècules orgàniques*.

¹² Vegeu, per exemple, el capítol 15 del volum 2 de BRUSH (1976).

¹³ La memòria presentada per Poincaré a Sant Lluís es pot veure a SOPKA (1986), 281–299. El text que nosaltres hem citat és a la pàgina 287; també està reproduït a BRUSH (1976), vol. 2, 670–671.

nats de partícules en suspensió: es tracta del moviment brownià; primer va pensar que es tractava d'un fenomen vital, però aviat es va adonar que els cossos inanimats dansaven amb no menys ardor que els altres; llavors va passar el problema als físics. Desgraciadament, els físics es van mantenir massa temps desinteressats per aquesta qüestió; la llum s'enfoca per il·luminar la preparació microscòpica —van pensar ells— amb la llum va la calor; d'aquí les desigualtats de temperatura i els corrents interns produeixen en el líquid els moviments als que ens estem referint.

»El senyor Gouy [cap el 1888], però, va analitzar el problema més detingudament i va veure, o va creure que veia, que l'explicació anterior resultava insostenible, que els moviments són més vius com més petites són les partícules, però que no estaven influïts per la manera d'il·luminar.

»Llavors, si aquests moviments no cessen mai o, millor, reneixen de manera incessant, sense cap col·laboració d'una font externa d'energia, què hem de pensar? Sens dubte, no hauríem de renunciar a la nostra creença en la conservació de l'energia, però veiem que davant els nostres ulls uns cops el moviment es transforma en calor per fricció i d'altres com, inversament, la calor es transforma en moviment, i això sense pèrdues, atès que el moviment perdura indefinidament. És l'oposat del principi de Carnot.»

Entre les aportacions de Louis G. Gouy (1854–1926) que Poincaré menciona i la incursió d'Einstein en aquest camp, s'ha de citar encara Felix Exner (1876–1930), que el 1900 —sobre la base dels seus experiments— va afegir a la creença ja generalitzada que la velocitat del moviment brownià decreixia en augmentar les dimensions de les partícules, el fet que la velocitat augmentava quan ho

feia la temperatura del líquid.

Finalment, abans d'entrar en el contingut de l'article, un aclariment. El famós treball d'Einstein en què posa les bases per a l'explicació del moviment brownià va aparèixer publicat abans que la tesi doctoral. Com que el tractament és pràcticament el mateix en tots dos treballs, de vegades s'ha insinuat que les primeres idees sobre la conjunció —en una mateixa teoria sobre les dissolucions— de la difusió (tractament discret) i de la viscositat (tractament continu) apareixen en la seva explicació del moviment brownià i que en la tesi doctoral es limita a repetir aquests mateixos arguments. Això no és cert: convé precisar-ne la cronologia.

La tesi doctoral figura datada el 30 d'abril de 1905. Els tràmits burocràtics —i algun lleuger retoc— van fer que la publicació als *Annalen* es demorés fins al febrer de 1906. El famós article en què s'explica el moviment brownià, tot i que va aparèixer als *Annalen* el juliol de 1905, està datat del maig. Tot això indica clarament que les idees d'Einstein sobre la física de les molècules suspeses en líquids es van plasmar primer en la tesi doctoral i després en l'article sobre el moviment brownià, i no al revés.

3.2 Contingut de «Sobre el moviment de partícules en suspensió en líquids en repòs, que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor»

Einstein aplica la seva formulació de la mecànica estadística a l'estudi de la relació entre la pressió p exercida sobre les partícules suspeses en un líquid en funció de la concentració ν , que suposa que és baixa. Després de justificar que en aquestes condicions les partícules en suspensió es comporten com les partícules dissoltes, i que p és la pressió osmòtica, arriba a l'expressió:

$$p = \frac{RT}{N} \nu, \quad (1)$$

on T representa la temperatura absoluta, R la constant universal dels gasos i N el nombre d'Avogadro.

Però en el moviment de les partícules suspeses, a la força osmòtica —que tendeix a portar les partícules cap a regions de menor concentració— s'oposa la força de viscositat del líquid solvent. Anomenant K la força osmòtica exercida sobre una partícula en suspensió, i tenint en compte que aquesta força ve donada pel gradient de p , l'última expressió condueix a

$$K\nu = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{RT}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad (2)$$

on x indica la direcció del moviment de la partícula.

D'altra banda, la teoria de Stokes sobre el moviment d'una partícula esfèrica de radi P —continuem emprant la notació original— que es mou en el si d'un líquid amb coeficient de viscositat k i està sotmesa a la força K , proporciona una expressió per al nombre de partícules suspeses que travessen la unitat de secció perpendicular a la direcció del moviment, per unitat de temps. Igualant aquesta expressió amb el nombre de partícules difoses en aquestes mateixes condicions, s'obté que

$$\frac{\nu K}{6\pi k P} = D \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad (3)$$

on D representa el coeficient de difusió. Després d'eliminar entre les dues últimes igualtats el gradient de la pressió, s'obté el valor que Einstein dedueix en el seu article per al coeficient de difusió:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P}. \quad (4)$$

Així, el coeficient de difusió, si no es consideren els efectes de la gravetat, depèn de constants universals, de la temperatura absoluta, de la viscositat del líquid i de les dimensions de les partícules en suspensió.

Arribat a aquest punt, Einstein introdueix unes consideracions originals sobre el possible tractament estadístic del fenomen anterior, que fins a aquest moment havia analitzat segons les estrictes

lleis deterministes de la física clàssica. Atès que aquestes consideracions van representar el punt de partida d'anàlisis més generals del moviment brownià, i que posteriorment han tingut gran influència en el tractament modern dels processos estocàstics,¹⁴ preferim reproduir aquí les paraules del mateix Einstein:¹⁵

«Evidentment, hem de suposar que cada partícula individual executa un moviment que és independent dels moviments de totes les altres partícules; també que els moviments d'una certa partícula en diferents intervals de temps han de ser considerats com a processos independents entre ells, sempre que aquests intervals de temps no els escollim massa petits.

»Considerarem ara un interval de temps τ que sigui molt petit comparat amb els intervals de temps observables, però prou gran perquè els moviments executats per una partícula en dos intervals de temps τ consecutius puguin ser considerats com a esdeveniments independents entre ells.»

En aquestes condicions d'absència de correlacions entre intervals temporals consecutius, i suposant n partícules en suspensió en un líquid, el nombre dn de partícules que pateixen —en un interval de temps τ — un desplaçament de la seva coordenada x comprès entre els valors Δ i $\Delta + d\Delta$ podrà expressar-se de la manera següent:

$$dn = n \varphi(\Delta) d\Delta, \quad (5)$$

on $\varphi(\Delta) d\Delta$ representa la probabilitat que la coordenada x —d'una partícula qualsevol— pateixi un desplaçament comprès entre els valors Δ i $d\Delta$, en l'interval de temps τ .

¹⁴Es pot comprovar consultant, per exemple, la recopilació continguda a WAX (1954).

¹⁵EINSTEIN (1905b).

És el moment en què Einstein introdueix la concentració en el seu formalisme: $\nu = f(x, t)$ representa el nombre de partícules en suspensió per unitat de volum. El valor de $f(x, t + \tau)$ es podrà deduir a partir de $f(x + \Delta, t)$. Assignant a cada possible desplaçament el seu pes corresponent s'arriba a:

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \Delta, t) \varphi(\Delta) d\Delta. \quad (6)$$

A partir d'aquí, emprant les expressions anteriors, alguna altra suposició versemblant i un raonament senzill, Einstein dedueix la ja llavors ben coneguda equació diferencial de la difusió

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (7)$$

on ara el coeficient de difusió ve donat per l'expressió:

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta. \quad (8)$$

La solució de l'equació diferencial (7), amb condicions inicials i de contorn apropiades, és:

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}, \quad (9)$$

cosa que permet calcular-ne els valors mitjans. En particular Einstein obté el desplaçament quadràtic mitjà d'una partícula suspesa:

$$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2Dt}, \quad (10)$$

expressió que, si se substitueix el coeficient de difusió pel seu valor segons la igualtat (4), condueix al resultat final del seu treball:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi kP}}. \quad (11)$$

En aigua a 17°C, que és l'exemple escollit per Einstein per il·lustrar aquest resultat, les partícules d'una micra de diàmetre experimentarien un desplaçament mitjà en un minut que seria aproximadament de sis micres.¹⁶

Com s'ha evidenciat en algun cas, l'expressió anterior es pot prendre com el primer cas en què apareix una relació del tipus fluctuació-dissipació en física. Tot i que el tema seria desenvolupat amb posterioritat, potser no és sobrer assenyalar que aquí apareix un exemple en què es relaciona la fluctuació, representada pel camí lliure mitjà, amb un efecte de dissipació, associat a la viscositat del líquid.

Einstein no va deixar de destacar que aquesta última expressió es podria emprar també per determinar el valor de N —segueix sense referir-se a Avogadro—, un cop mesurats amb prou fiabilitat els desplaçaments de les partícules en suspensió en líquids. I acaba l'article expressant el seu desig que això es faci aviat:¹⁷

«Esperem que aviat algun investigador aconseguixi resoldre la qüestió plantejada abans [la determinació de N], que tanta importància té per a la teoria de la calor.»

3.3 Primer impacte

Einstein no va ser l'únic que es va ocupar del tema. Per exemple, ja el 1906, el físic d'origen polonès Marian von Smoluchowski (1872–1917) va publicar un treball —també als *Annalen*— en què, després de citar l'article d'Einstein de 1905, presentava un mètode alternatiu per al tractament del moviment brownià. Al seu parer, el nou mètode resultava més simple i emprava el càlcul combinatori

¹⁶En els seus càlculs Einstein pren com a viscositat de l'aigua el valor $k = 1,35 \cdot 10^{-2}$ i $N = 6 \cdot 10^{23}$, «d'acord amb els resultats de la teoria cinètica de gasos». Per a més detalls sobre l'elecció d'aquestes dades, no del tot encertada, podeu veure STACHEL (1989), 234–236.

¹⁷EINSTEIN (1905b).

com a eina matemàtica bàsica. A més de reproduir els resultats d'Einstein, Smoluchowski en generalitzava alguns al seu treball.¹⁸

De tota manera, el resultat final de Smoluchowski per al desplaçament quadràtic mitjà (11) diferia del d'Einstein en un factor numèric: $64/27$; factor que més tard es va demostrar que era erroni i que Smoluchowski va corregir en treballs futurs. Va ser precisament el fet de tractar d'aclarir la diferència entre els dos treballs que va conduir Paul Langevin (1872–1946) a ocupar-se del tema i a proposar el 1908 un tractament alternatiu original del moviment brownià que també permetia deduir la validesa de l'expressió (11), però ara a partir de l'equació que després seria coneguda com a *equació de Langevin*.¹⁹

Einstein va publicar altres treballs sobre el moviment brownià; essencialment es tracta d'aclariments, refinaments i generalitzacions sobre les seves idees inicials que acabem de comentar.²⁰ Tot i que es fa difícil exagerar-ne la importància i la influència, intentarem trobar arguments que confirmin tots dos extrems. Per exemple, el tractament d'Einstein es considera un punt de partida essencial per al desenvolupament ulterior dels processos estocàstics: un tema d'actualitat no només en el camp de la física sinó en àmbits de natura molt diferent, com ara l'anomenada *econofísica* o alguns temes relacionats amb les ciències socials.²¹

Einstein va arribar a ocupar-se, tot i que ara sense gaire èxit, del problema de la mesura experimental d'aquesta i altres fluctuacions. Per exemple, va tractar d'extrapolar la situació i el tractament del moviment brownià per poder aplicar-los a alguns fenòmens relacionats amb les fluctuacions de tensió elèctrica en condensadors

¹⁸Per a més detalls sobre la contribució de Smoluchowski i la seva relació amb Einstein, podeu veure PAIS (1984), 112–115 i «Editorial note: Einstein on Brownian motion», STACHEL (1989), 210–217.

¹⁹LANGEVIN (1908).

²⁰FÜRTH (1956) conté una recopilació en anglès dels cinc treballs principals —apareguts entre 1905 i 1908— incloent-hi tesi doctoral i l'article que estem comentant.

²¹Vegeu, per exemple, BARTHOLOMEW (1982).

i estudiar així la possibilitat de mesurar experimentalment quantitats molt petites d'electricitat. El tema el va atraure fins al punt d'arribar a pensar a patentar un artífici per dur a terme aquesta missió. Però la *màquina d'Einstein* —com a vegades se l'ha anomenat— no va arribar a tenir plena reconeixença, per circumstàncies diverses.²²

La confirmació experimental de les previsions teòriques d'Einstein sobre el moviment de partícules en suspensió en líquids va constituir una fita definitiva per a l'admissió generalitzada de la constitució molecular de la matèria. Perrin va ser qui va dur a terme els experiments convincents el 1908 i el 1909, fortament atret per la possibilitat de col·laborar decisivament a demostrar la validesa de la hipòtesi molecular, de la qual era un partidari decidit, possiblement influït pels resultats de les seves investigacions prèvies sobre raigs catòdics, que confirmaven l'existència d'«àtoms» d'electricitat. Perrin intuïa, sempre sobre la base de les seves investigacions, una realitat material amb una homogeneïtat i una continuïtat aparents, aspectes grollers que no podien emmascarar, als ulls d'un observador fi, la discontinuïtat última subjacent en el comportament microscòpic. És fàcil, amb una premissa com aquesta, fer-se una idea del gran atractiu que per ell havia de tenir des d'un principi la possibilitat de sotmetre a prova experimental sòlida la teoria d'Einstein sobre les partícules suspeses en líquids.

Una llarga sèrie d'experiments duts a terme per Perrin el 1908, amb partícules de certes resines colorants, va portar a la primera confirmació de la teoria d'Einstein. De fet, va comprovar la validesa de la distribució donada per l'expressió (9) —tot i que en una forma més apta al contrast experimental— proposada el 1906 pel mateix Einstein, que ja tenia en compte l'efecte de la gravetat:

$$dW = \text{constant} \cdot e^{-\frac{N}{RT} \nu (\rho - \rho_0) g x} dx, \quad (12)$$

²²Per a més detalls podeu veure: «Editorial note: Einstein's "Maschinen" for the measurement of small quantities of electricity», a KLEIN et al. (1993b), 51–55.

que expressa la distribució de probabilitat W per la distància vertical x , comptada des del fons del recipient, de partícules brownianes de densitat ρ i de volum ν , suspeses en un líquid de densitat ρ_0 , amb acceleració de gravetat g .²³

Els experiments de Perrin, que van pesar decisivament en el fet que li fos concedit el Premi Nobel de Física el 1926,²⁴ van subministrar a la teoria cinètica —ja batejada com a *mecànica estadística*— el suport experimental bàsic, el de la constitució molecular que va passar a ser considerat com un fet ja demostrat experimentalment. Per això la conversió a l'atomisme cap a 1909 va ser pràcticament general. Com a exemple, i perquè es tracta d'un dels activistes més il·lustres contra l'atomisme abans de la seva conversió, recollim dos textos eloqüents de l'energetista F. W. Ostwald separats només tres anys en el temps:²⁵

«[...] Com hem anat mantenint durant els darrers deu anys [...] [la teoria molecular] ha de ser substituïda per una altra teoria, que s'ha anomenat *energètica* [...] La qüestió sobre la identitat o la no-identitat de diferents porcions d'aigua no té sentit, ja que no hi ha manera d'aïllar les diferents porcions d'aigua i identificar-les... els àtoms només són objectes hipotètics [...].»

[Harvard, 1906]

«M'he convençut que recentment hem arribat a la possessió de la prova experimental de la natura discreta o granular de la matèria, que la hipòtesi atòmica ha buscat en va durant segles, mil·lennis fins i tot [...] i, d'altra banda, l'acord dels moviments brownians amb les

²³EINSTEIN (1906b), 376. Reproducció a STACHEL (1989), 339. Traducció anglesa a BECK (1989), 184–185.

²⁴Li va ser atorgat «pel seu treball sobre l'estructura discontinua de la matèria i, especialment, pel seu descobriment de l'equilibri de sedimentació».

²⁵Extractes citats a BRUSH (1976), vol. 2, 698–699. La remarca en cursiva de la citació prové de l'original.

prediccions de la hipòtesi cinètica, que han demostrat una sèrie d'investigadors, principalment J. B. Perrin, és una evidència que alhora justifica que fins i tot els científics més prudents parlin de la prova *experimental* de la natura atòmica de la matèria que omple l'espai. El que fins ara s'ha anomenat hipòtesi atòmica queda per tant elevada al nivell de teoria ben fonamentada [...].»

[Leipzig, 1909]

Unes dades quantitatives addicionals sobre la freqüència amb què són citades les contribucions que estem comentant, tot i que no suposen arguments definitius, ajuden a calibrar la importància que els investigadors van assignar des del principi a aquest tractament d'Einstein sobre el moviment de partícules en suspensió en líquids. Per exemple, entre la dotzena de treballs científics publicats abans de 1912 —naturalment, de qualsevol autor— amb un nombre més gran de citacions entre els anys 1961 i 1975, quatre són d'Einstein. Entre aquests, la versió de la tesi doctoral, tal com va aparèixer als *Annalen* el 1906, figura al capdavant i l'article de 1905 sobre partícules en suspensió ocupa el tercer lloc; en la classificació citada no apareixen els articles sobre relativitat ni sobre teoria quàntica.²⁶

Unes paraules de Born, referint-se el 1949 al treball d'Einstein que estem comentant, constitueixen un bon epíleg. No només va destacar que «per la seva senzillesa i claredat aquest article és un clàssic de la nostra ciència», sinó que va rematar una afirmació tan rotunda amb el comentari següent:²⁷

«Crec que aquestes investigacions d'Einstein [sobre el moviment brownià] han fet més que qualsevol altre treball per convèncer els físics de la realitat dels àtoms i

²⁶ Aquestes dades es troben a PAIS (1984), 102.

²⁷ SCHILPP (1970), 166.

les molècules, de la teoria cinètica de la calor [és a dir, de la mecànica estadística] i del paper fonamental de la probabilitat en les lleis de la natura.»

Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor

Traducció d'Oliver Strunck.

Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor

En aquest treball volem mostrar que, segons la teoria cineticomolecular de la calor, els cossos de mida microscòpica en suspensió en fluids, a causa del moviment molecular, han de fer moviments d'una magnitud suficient perquè es puguin observar fàcilment amb el microscopi. És possible que els moviments dels quals tractarem aquí siguin idèntics a l'anomenat «moviment molecular brownià», però les dades de què dispoço són tan imprecises que no puc fer-me'n un judici.

Si el moviment de què volem tractar aquí i les lleis a què suposem que obeeix són realment observables, aleshores ja no podem continuar considerant la termodinàmica clàssica estrictament vàlida fins i tot per a espais microscòpicament distingibles i es fa possible una determinació exacta de la mida real dels àtoms. Si, al contrari, es demostra que la predicció d'aquest moviment no és encertada, aquest fet proporcionaria un argument de pes en contra de la concepció cineticomolecular de la calor.

§1. Sobre la pressió osmòtica que s'ha d'associar amb les partícules en suspensió

En una part de volum V^* d'un fluid de volum total V , s'hi troben dissoltes z molècules gram d'un no-electròlit. Si el volum V^* està separat del dissolvent pur per una membrana permeable per al dissolvent, però no per a la substància dissolta, aleshores actua contra aquesta membrana l'anomenada pressió osmòtica que, per a valors suficientment alts de V^*/z , compleix l'equació:

$$pV^* = RTz.$$

Si en lloc de la substància dissolta en el volum parcial V^* s'hi troben petits cossos en suspensió, que tampoc no poden travessar la membrana permeable per al dissolvent, aleshores segons la teoria

clàssica de la termodinàmica no es pot esperar —si més no obviant la gravetat, que aquí no ens interessa— que s'exerceixi una força sobre la membrana; perquè l'«energia lliure» del sistema, segons la concepció tradicional, sembla que no depèn de la posició de la membrana ni dels cossos en suspensió, sinó exclusivament de la massa total i de les propietats de la substància en suspensió, del fluid i de la membrana, així com de la pressió i la temperatura. És cert que, a l'hora de calcular l'energia lliure, s'hauria de considerar, a més, l'energia i l'entropia de les superfícies limítrofes (forces capil·lars). Però aquí en podem prescindir perquè els canvis de posició de la membrana i dels cossos en suspensió no afectaran ni la mida ni l'estructura de les superfícies de contacte.

Des del punt de vista de la teoria cineticomolecular de la calor podem arribar, tanmateix, a una altra concepció. Segons aquesta teoria, una molècula dissolta es distingeix d'un cos en suspensió *únicament* per la mida i no s'entén per quin motiu a un cert nombre de cossos en suspensió no els ha de correspondre la mateixa pressió osmòtica que al mateix nombre de molècules dissoltes. Hem de suposar que els cossos en suspensió, a causa del moviment molecular del fluid, s'hi mouen, per bé que lentament, de manera desordenada; si la membrana els impedeix abandonar el volum V^* , aleshores exerceixen una força sobre la membrana, exactament igual que les molècules dissoltes. Per tant, si hi ha n cossos en suspensió en el volum V^* , és a dir $n/V^* = \nu$ en una unitat de volum, i els més pròxims entre ells estan prou distanciats els uns dels altres, aleshores els correspon una pressió osmòtica p de magnitud:

$$p = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \nu,$$

on N significa el nombre de molècules reals que conté en una molècula gram. En l'apartat següent mostrarem que la teoria cineticomolecular de la calor porta efectivament a aquesta concepció més àmplia de la pressió osmòtica.

§2. La pressió osmòtica des del punt de vista de la teoria cineticomolecular de la calor¹

Donades $p_1 p_2 \dots p_l$ variables d'estat d'un sistema físic, que en determinen completament l'estat instantani (p. ex., les coordenades i components de velocitat de tots els àtoms del sistema), el sistema complet de les equacions de variació d'aquestes variables d'estat és de la forma:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \varphi_\nu(p_1 \dots p_l) \quad (\nu = 1, 2 \dots l),$$

on $\sum \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\nu} = 0$, aleshores l'entropia del sistema s'expressa de la manera següent:

$$S = \frac{\bar{E}}{T} + 2\kappa \ln \int e^{-\frac{E}{2\kappa T}} dp_1 \dots dp_l.$$

Aquí T representa la temperatura absoluta, $\bar{E}$ l'energia del sistema, i E , l'energia com a funció de p_ν . La integral s'estén sobre totes les combinacions de valors de p_ν compatibles amb les condicions del problema. κ està relacionada amb la constant N esmentada més amunt mitjançant la relació $2\kappa N = R$. Per a l'energia lliure F obtenim, per tant:

$$F = -\frac{R}{N} T \ln \int e^{-\frac{EN}{RT}} dp_1 \dots dp_l = -\frac{RT}{N} \ln B.$$

Imaginem, ara, un fluid tancat dins el volum V ; dins el volum parcial V^* hi ha n molècules dissoltes o bé cossos en suspensió retenguts dins el mateix volum V^* per una membrana semipermeable; això afecta els límits d'integració de la integral B que apareix en les expressions per a S i per a F . Suposem que el volum total de

¹En aquest apartat donem per coneguts els treballs de l'autor sobre els fonaments de la termodinàmica (vegeu *Annalen der Physik*, 9, 417 (1902), i 11, 170 (1903)). Per comprendre els resultats del present treball, no cal conèixer ni aquells treballs ni aquest apartat.

les molècules dissoltes o dels cossos en suspensió és petit en comparació amb V^* . D'acord amb la teoria esmentada, aquest sistema està representat completament per les variables d'estat $p_1 \dots p_l$.

Fins i tot si la imatge molecular compregués fins els menors detalls, llavors el càlcul de la integral B presentaria tantes dificultats que gairebé seria impossible pensar de calcular exactament F . Però aquí només ens cal saber com depèn F de la mida del volum V^* , que conté totes les molècules dissoltes o els cossos en suspensió (que a partir d'ara anomenarem per breuetat «partícules»).

Anomenem x_1, y_1, z_1 les coordenades rectangulars del centre de gravetat de la primera partícula, x_2, y_2, z_2 les de la segona, etc., x_n, y_n, z_n les de la darrera partícula; i assignem als centres de gravetat de les partícules les regions en forma de paral·lelepípedes infinitament petits $dx_1 dy_1 dz_1, dx_2 dy_2 dz_2, \dots dx_n dy_n dz_n$, les quals es troben totes a V^* . El que busquem és el valor de la integral que apareix en l'expressió per a F , amb la restricció que els centres de gravetat de les partícules estan situats a les regions que els acabem d'assignar. Aquesta integral es pot expressar en qualsevol cas de la manera següent:

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n J,$$

on J és independent de $dx_1 dy_1$, etc., així com de V^* , és a dir, de la posició de la membrana semipermeable. Però, tal com mostrarem immediatament, J també és independent de l'elecció específica dels llocs de les regions dels centres de gravetat i del valor de V^* . Considerem, en efecte, un segon sistema de regions infinitament petites per als centres de gravetat de les partícules que anomenem $dx'_1 dy'_1 dz'_1, dx'_2 dy'_2 dz'_2, \dots dx'_n dy'_n dz'_n$ (aquestes regions no es diferenciarien pas de les originals per la seva localització, sinó només per la mida i estarien totes igualment contingudes dins V^*) aleshores, anàlogament s'obté:

$$dB' = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n J',$$

on

$$dx_1 dy_1 \dots dz_n = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n.$$

Per tant,

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

De la teoria molecular de la calor presentada en els articles esmentats es pot deduir fàcilment² que dB/B o dB'/B és igual a la probabilitat que els centres de gravetat de les partícules es trobin en un instant escollit a l'atzar dins les regions $(dx_1 \dots dz_n)$ o a les regions $(dx'_1 \dots dz'_n)$. Si els moviments de cada una de les partícules (amb una aproximació suficient) són independents, el fluid és prou homogeni i no actua cap força sobre les partícules, aleshores per a regions de la mateixa mida la probabilitat dels dos sistemes de regions ha de ser la mateixa i, per tant, es compleix:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B}.$$

D'aquesta i de la darrera equació establerta es desprèn, tanmateix, que

$$J = J'.$$

D'aquesta manera es demostra que J no depèn ni de V^* ni de $x_1 y_1 \dots z_n$. Integrant, obtenim:

$$B = \int J dx_1 \dots dz_n = J V^{*n}$$

i d'aquí

$$F = -\frac{RT}{N} \{\ln J + n \ln V^*\}$$

i

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \nu.$$

Aquest raonament mostra que l'existència de la pressió osmòtica és una conseqüència de la teoria cineticomolecular de la calor i que, segons aquesta teoria, per a concentracions baixes, sistemes del mateix nombre de molècules dissoltes o de cossos en suspensió es comporten exactament igual pel que fa a la pressió osmòtica.

²A. EINSTEIN, *Annalen der Physik*, **11**, 170 (1903).

§3. Teoria de la difusió de petites esferes en suspensió

En un fluid s'hi troben partícules en suspensió, repartides de manera irregular. Volem investigar-ne l'estat d'equilibri dinàmic a partir de la hipòtesi que, sobre cada una de les partícules, actua una força K que depèn de la posició, però no del temps. Per simplificar, suposarem que la força tindrà la direcció de l'eix X a tot arreu.

Si ν és el nombre de partícules en suspensió per unitat de volum, llavors en el cas de l'equilibri termodinàmic, ν és una funció tal de x que la variació de l'energia lliure és nul·la per a un desplaçament virtual qualsevol δx de la substància en suspensió. Per tant, tenim:

$$\delta F = \delta E - T\delta S = 0.$$

Suposem que el fluid està limitat pels plans $x = 0$ i $x = l$ i que la seva secció perpendicular a l'eix X és igual a una unitat. Aleshores, tenim:

$$\delta E = - \int_0^l K\nu \delta x dx$$

i

$$\delta S = \int_0^l R \frac{\nu}{N} \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx = - \frac{R}{N} \int_0^l \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x dx.$$

La condició d'equilibri que busquem és, per tant:

$$(1) \quad -K\nu + \frac{RT}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

o

$$K\nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

La darrera equació afirma que la força K es compensa amb les forces de pressió osmòtica.

Utilitzem l'equació (1) per calcular els coeficients de difusió de la substància en suspensió. Podem concebre l'estat d'equilibri

dinàmic que acabem d'examinar com la superposició de dos processos que actuen en sentit contrari, és a dir:

1. un moviment de la substància en suspensió sota l'efecte de la força K que actua sobre cada una de les partícules en suspensió,
2. un procés de difusió que s'ha d'entendre com una conseqüència dels moviments irregulars causats pels moviments tèrmics moleculars.

Si les partícules en suspensió tenen forma esfèrica (radi de l'esfera P) i el fluid té un coeficient de viscositat k , aleshores la força K imprimeix a cada partícula la velocitat³

$$\frac{K}{6\pi kP},$$

i a través de la unitat d'àrea passen

$$\frac{\nu K}{6\pi kP}$$

partícules per unitat de temps.

Si, a més, D designa el coeficient de difusió de la substància en suspensió i μ la massa de la partícula, aleshores apareixen:

$$-D \frac{\partial(\mu\nu)}{\partial x} \text{ grams}$$

o

$$-D \frac{\partial\nu}{\partial x}$$

partícules per unitat d'àrea i unitat de temps com a resultat de la difusió. Atès que hi ha d'haver equilibri dinàmic, aleshores, ha de ser:

$$(2) \quad \frac{\nu K}{6\pi kP} - D \frac{\partial\nu}{\partial x} = 0.$$

³Vegeu, per exemple, G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik*, lliçó 26, apartat 4.

Amb les dues condicions (1) i (2) establertes per a l'equilibri dinàmic podem calcular el coeficient de difusió. Obtenim:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi kP}.$$

El coeficient de difusió de la substància en suspensió només depèn, per tant, a part de constants universals i de la temperatura absoluta, del coeficient de viscositat del fluid i de la mida de les partícules en suspensió.

§4. Sobre el moviment desordenat de les partícules en suspensió en un fluid i la seva relació amb la difusió

Passem a investigar amb més precisió el moviment desordenat que, produït pel moviment tèrmic molecular, dóna lloc a la difusió que hem analitzat en l'apartat anterior.

Naturalment hem de suposar que el moviment de cada partícula és independent de la resta; també entendrem els moviments d'una única partícula en diversos intervals de temps com a processos independents entre ells, sempre que aquests intervals de temps no es considerin massa petits.

Introduïm un interval de temps τ , que és molt petit en comparació amb els intervals de temps observables, però prou gran per considerar els moviments d'una partícula entre dos intervals de temps τ consecutius com a esdeveniments independents entre ells.

Suposem ara que hi ha en total n partícules en suspensió en un fluid. En un interval de temps τ s'incrementen les coordenades X de cada una de les partícules en Δ , on Δ té un valor diferent (positiu o negatiu) per a cada partícula. Δ satisfarà una distribució estadística determinada: el nombre dn de partícules que durant l'interval de temps τ sofreix una desviació que se situa entre Δ i $\Delta + d\Delta$, es pot expressar mitjançant una equació de la manera següent:

$$dn = n\varphi(\Delta)d\Delta,$$

on

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1$$

i φ és diferent de zero només per a valors molt petits de Δ i satisfà la condició

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta).$$

Ara investigarem com depèn de φ el coeficient de difusió, limitant-nos novament al cas en què el nombre ν de partícules per unitat de volum depengui solament de x i de t .

Sigui $\nu = f(x, t)$ el nombre de partícules per unitat de volum i calculem la distribució de les partícules en l'instant $t + \tau$ a partir de la distribució en el temps t . De la definició de la funció $\varphi(\Delta)$ obtenim fàcilment el nombre de partícules que es troben en el temps $t + \tau$ entre dos plans perpendiculars a l'eix X amb abscisses x i $x + dx$. Obtenim:

$$f(x, t + \tau) dx = dx \int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x + \Delta) \varphi(\Delta) d\Delta.$$

Podem escriure, tanmateix, ja que τ és molt petit:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

A continuació, desenvolupem $f(x + \Delta, t)$ en potències de Δ :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \text{ad inf.}$$

Aquest desenvolupament el podem incloure a la integral, atès que només hi contribueixen valors molt petits de Δ . Aleshores obtenim:

$$f + \frac{\partial f}{\partial t} \tau = f \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi d\Delta$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta \dots$$

A la banda dreta s'anul·la el segon terme, el quart, etc., ja que $\varphi(x) = \varphi(-x)$, mentre que del primer terme, el tercer, el cinquè, etc., qualsevol terme successiu és molt petit en relació amb l'anterior. D'aquesta equació obtenim, tenint en compte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

i

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D$$

i tenint en compte només el primer i el tercer termes de la banda dreta:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Aquesta és la coneguda equació diferencial de la difusió, on reconeixem que D és el coeficient de difusió.

Podem afegir encara una reflexió important a aquest desenvolupament. Hem suposat que totes les partícules estaven donades en el mateix sistema de coordenades. Però això és innecessari, ja que els moviments de cada una de les partícules són independents entre ells. Ara volem, per tant, referir el moviment de cada una de les partícules a un sistema de coordenades l'origen del qual coincideixi amb la posició del centre de gravetat de la partícula en qüestió en el temps $t = 0$, amb la diferència que ara $f(x, t) dx$ significa el nombre de partícules, que entre els instants $t = 0$ i $t = t$, *incrementen* les coordenades X en un valor entre x i $x + dx$. En aquest cas també varia, per tant, la funció f segons l'equació (3).

A més, per a $x \leq 0$ i $t = 0$ ha de ser, evidentment,

$$f(x, t) = 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = n.$$

El problema, que coincideix amb el problema de la difusió a partir d'un punt (deixant de banda la interacció de les partícules difusores), queda completament determinat matemàticament; la solució és:

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

La distribució estadística dels canvis de posició que es produeixen en un temps t qualsevol és, per tant, la mateixa que la dels errors aleatoris, tal com esperàvem. El que és important, però, és de quina manera està relacionada la constant de l'exponent amb el coeficient de difusió. Amb l'ajuda d'aquesta equació calculem ara el desplaçament mitjà λ_x en la direcció de l'eix X , que experimenta una partícula o —més ben dit— l'arrel de la mitjana aritmètica al quadrat dels desplaçaments en la direcció de l'eix X ; i el resultat és:

$$\lambda_x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2Dt}.$$

Per tant, el desplaçament mitjà és proporcional a l'arrel quadrada del temps. Es pot mostrar fàcilment que l'arrel del valor mitjà al quadrat dels desplaçaments totals de les partícules té el valor $\lambda_x \sqrt{3}$.

§5. Fórmula per al desplaçament mitjà de les partícules en suspensió. Un nou mètode per determinar la mida real dels àtoms

En la secció §3 hem trobat el valor següent per al coeficient de difusió D d'una substància en forma de petites esferes de radi P en suspensió dins un fluid:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi kP}.$$

A més, en la secció §4 hem trobat també per al valor mitjà del desplaçament de les partícules en la direcció de l'eix X en el temps t :

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt}.$$

Eliminant D , obtenim:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi kP}}.$$

Aquesta equació mostra com λ_x depèn de T , de k i de P .

Calculem el valor de λ_x després d'un segon, si es pren N — segons els resultats de la teoria cinètica dels gasos— igual a $6 \cdot 10^{23}$; triem com a fluid, aigua a 17°C ($k = 1,35 \cdot 10^{-2}$) i sigui el diàmetre de la partícula de 0,001 mm. Obtenim:

$$\lambda_x = 8 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,8 \text{ micres.}$$

El desplaçament mitjà en un minut serà, en aquest cas, de prop de 6 micres.

A l'inrevés, la relació que hem trobat es pot utilitzar per determinar N . Obtenim:

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2} \frac{RT}{3\pi kP}.$$

Esperem que algun investigador aconseguixi aviat resoldre aquestes qüestions que hem presentat aquí i que són tan importants per a la teoria de la calor!

«Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme
geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendi-
erten Teilchen»

Annalen der Physik, **17**, 549–560 (1905).

Datat: Berna, maig de 1905.

Rebut: 11 de maig de 1905.

Publicat: 18 de juliol de 1905.

**5. Über die von der molekularkinetischen Theorie
der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.**

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

**§ 1. Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden
osmotischen Druck.**

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien z -Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

mittel getrennt, so wirkt auf diese Wand der sogenannte osmotische Druck, welcher bei genügend großen Werten von V^*/z der Gleichung genügt:

$$p V^* = R T z .$$

Sind hingegen statt der gelösten Substanz in dem Teilvolumen V^* der Flüssigkeit kleine suspendierte Körper vorhanden, welche ebenfalls nicht durch die für das Lösungsmittel durchlässige Wand hindurchtreten können, so hat man nach der klassischen Theorie der Thermodynamik — wenigstens bei Vernachlässigung der uns hier nicht interessierenden Schwerkraft — nicht zu erwarten, daß auf die Wand eine Kraft wirke; denn die „freie Energie“ des Systems scheint nach der üblichen Auffassung nicht von der Lage der Wand und der suspendierten Körper abzuhängen, sondern nur von den Gesamtmassen und Qualitäten der suspendierten Substanz, der Flüssigkeit und der Wand, sowie von Druck und Temperatur. Es kämen allerdings für die Berechnung der freien Energie noch Energie und Entropie der Grenzflächen in Betracht (Kapillarkräfte); hiervon können wir jedoch absehen, indem bei den ins Auge zu fassenden Lagenänderungen der Wand und der suspendierten Körper Änderungen der Größe und Beschaffenheit der Berührungsflächen nicht eintreten mögen.

Vom Standpunkte der molekularkinetischen Wärmetheorie aus kommt man aber zu einer anderen Auffassung. Nach dieser Theorie unterscheidet sich eingelöstes Molekül von einem suspendierten Körper *lediglich* durch die Größe, und man sieht nicht ein, warum einer Anzahl suspendierter Körper nicht derselbe osmotische Druck entsprechen sollte, wie der nämlichen Anzahl gelöster Moleküle. Man wird anzunehmen haben, daß die suspendierten Körper infolge der Molekularbewegung der Flüssigkeit eine wenn auch sehr langsame ungeordnete Bewegung in der Flüssigkeit ausführen; werden sie durch die Wand verhindert, das Volumen V^* zu verlassen, so werden sie auf die Wand Kräfte ausüben, ebenso wie gelöste Moleküle. Sind also n suspendierte Körper im Volumen V^* , also $n/V^* = \nu$ in der Volumeneinheit vorhanden, und sind benachbarte unter ihnen genügend weit voneinander entfernt, so wird ihnen ein osmotischer Druck p entsprechen von der Größe:

$$p = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \cdot \nu,$$

wobei N die Anzahl der in einem Gramm-Molekül enthaltenen wirklichen Moleküle bedeutet. Im nächsten Paragraph soll gezeigt werden, daß die molekularkinetische Theorie der Wärme wirklich zu dieser erweiterten Auffassung des osmotischen Druckes führt.

§ 2. Der osmotische Druck vom Standpunkte der molekularkinetischen Theorie der Wärme.¹⁾

Sind $p_1 p_2 \dots p_l$ Zustandsvariable eines physikalischen Systems, welche den momentanen Zustand desselben vollkommen bestimmen (z. B. die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten aller Atome des Systems) und ist das vollständige System der Veränderungsgleichungen dieser Zustandsvariablen von der Form

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \varphi_\nu(p_1 \dots p_l) (\nu = 1, 2 \dots l)$$

gegeben, wobei $\sum \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\nu} = 0$, so ist die Entropie des Systems durch den Ausdruck gegeben:

$$S = \frac{E}{T} + 2\pi \lg \int e^{-\frac{E}{2\pi T}} dp_1 \dots dp_l.$$

Hierbei bedeutet T die absolute Temperatur, E die Energie des Systems, E die Energie als Funktion der p_ν . Das Integral ist über alle mit den Bedingungen des Problems vereinbaren Wertekombinationen der p_ν zu erstrecken. π ist mit der oben erwähnten Konstanten N durch die Relation $2\pi N = R$ verbunden. Für die freie Energie F erhalten wir daher:

$$F = -\frac{R}{N} T \lg \int e^{-\frac{EN}{RT}} dp_1 \dots dp_l = -\frac{RT}{N} \lg B.$$

1) In diesem Paragraph sind die Arbeiten des Verfassers über die Grundlagen der Thermodynamik als bekannt vorausgesetzt (vgl. Ann. d. Phys. 9. p. 417. 1902; 11. p. 170. 1903). Für das Verständnis der Resultate der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis jener Arbeiten sowie dieses Paragraphen der vorliegenden Arbeit entbehrlich.

Wir denken uns nun eine in dem Volumen V eingeschlossene Flüssigkeit; in dem Teilvolumen V^* von V mögen sich n gelöste Moleküle bez. suspendierte Körper befinden, welche im Volumen V^* durch eine semipermeable Wand festgehalten seien; es werden hierdurch die Integrationsgrenzen des in den Ausdrücken für S und F auftretenden Integrales B beeinflusst. Das Gesamtvolumen der gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper sei klein gegen V^* . Dies System werde im Sinne der erwähnten Theorie durch die Zustandsvariabeln $p_1 \dots p_i$ vollständig dargestellt.

Wäre nun auch das molekulare Bild bis in alle Einzelheiten festgelegt, so böte doch die Ausrechnung des Integrales B solche Schwierigkeiten, daß an eine exakte Berechnung von F kaum gedacht werden könnte. Wir brauchen jedoch hier nur zu wissen, wie F von der Größe des Volumens V^* abhängt, in welchem alle gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper (im folgenden kurz „Teilchen“ genannt) enthalten sind.

Wir nennen x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Schwerpunktes des ersten Teilchens, x_2, y_2, z_2 die des zweiten etc., x_n, y_n, z_n die des letzten Teilchens und geben für die Schwerpunkte der Teilchen die unendlich kleinen parallelepipedförmigen Gebiete $dx_1 dy_1 dz_1, dx_2 dy_2 dz_2 \dots dx_n dy_n dz_n$, welche alle in V^* gelegen seien. Gesucht sei der Wert des im Ausdruck für F auftretenden Integrales mit der Beschränkung, daß die Teilchenschwerpunkte in den ihnen soeben zugewiesenen Gebieten liegen. Dies Integral läßt sich jedenfalls auf die Form

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n \cdot J$$

bringen, wobei J von $dx_1 dy_1$ etc., sowie von V^* , d. h. von der Lage der semipermeablen Wand, unabhängig ist. J ist aber auch unabhängig von der speziellen Wahl der Lagen der Schwerpunktsgebiete und von dem Werte von V^* , wie sogleich gezeigt werden soll. Sei nämlich ein zweites System von unendlich kleinen Gebieten für die Teilchenschwerpunkte gegeben und bezeichnet durch $dx'_1 dy'_1 dz'_1, dx'_2 dy'_2 dz'_2 \dots dx'_n dy'_n dz'_n$, welche Gebiete sich von den ursprünglich gegebenen nur durch ihre Lage, nicht aber durch ihre Größe unterscheiden mögen und ebenfalls alle in V^* enthalten seien, so gilt analog:

$$dB = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n \cdot J,$$

wobei

$$dx_1 dy_1 \dots dz_n = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n.$$

Es ist also:

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

Aus der in den zitierten Arbeiten gegebenen molekularen Theorie der Wärme läßt sich aber leicht folgern¹⁾, daß dB/B bez. dB'/B gleich ist der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkte die Teilchenschwerpunkte in den Gebieten $(dx_1 \dots dz_n)$ bez. in den Gebieten $(dx'_1 \dots dz'_n)$ befinden. Sind nun die Bewegungen der einzelnen Teilchen (mit genügender Annäherung) voneinander unabhängig, ist die Flüssigkeit homogen und wirken auf die Teilchen keine Kräfte, so müssen bei gleicher Größe der Gebiete die den beiden Gebietssystemen zukommenden Wahrscheinlichkeiten einander gleich sein, so daß gilt:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B'}.$$

Aus dieser und aus der zuletzt gefundenen Gleichung folgt aber

$$J = J'.$$

Es ist somit erwiesen, daß J weder von V^* noch von $x_1, y_1 \dots z_n$ abhängig ist. Durch Integration erhält man

$$B = \int J dx_1 \dots dz_n = J V^{*n}$$

und daraus

$$F = - \frac{RT}{N} \{ \lg J + n \lg V^* \}$$

und

$$p = - \frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RT}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \nu.$$

Durch diese Betrachtung ist gezeigt, daß die Existenz des osmotischen Druckes eine Konsequenz der molekularkinetischen Theorie der Wärme ist, und daß nach dieser Theorie gelöste Moleküle und suspendierte Körper von gleicher Anzahl sich in bezug auf osmotischen Druck bei großer Verdünnung vollkommen gleich verhalten.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 11. p. 170. 1903.

§ 3. Theorie der Diffusion kleiner suspendierter Kugeln.

In einer Flüssigkeit seien suspendierte Teilchen regellos verteilt. Wir wollen den dynamischen Gleichgewichtszustand derselben untersuchen unter der Voraussetzung, daß auf die einzelnen Teilchen eine Kraft K wirkt, welche vom Orte, nicht aber von der Zeit abhängt. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß die Kraft überall die Richtung der X -Achse habe.

Es sei ν die Anzahl der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit, so ist im Falle des thermodynamischen Gleichgewichtes ν eine solche Funktion von x , daß für eine beliebige virtuelle Verrückung δx der suspendierten Substanz die Variation der freien Energie verschwindet. Man hat also:

$$\delta F = \delta E - T \delta S = 0.$$

Es werde angenommen, daß die Flüssigkeit senkrecht zur X -Achse den Querschnitt 1 habe und durch die Ebenen $x=0$ und $x=l$ begrenzt sei. Man hat dann:

$$\delta E = - \int_0^l K \nu \delta x dx$$

und

$$\delta S = \int_0^l R \frac{\nu}{N} \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx = - \frac{R}{N} \int_0^l \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x dx.$$

Die gesuchte Gleichgewichtsbedingung ist also:

$$(1) \quad -K\nu + \frac{RT}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

oder

$$K\nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Die letzte Gleichung sagt aus, daß der Kraft K durch osmotische Druckkräfte das Gleichgewicht geleistet wird.

Die Gleichung (1) benutzen wir, um den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz zu ermitteln. Wir können den eben betrachteten dynamischen Gleichgewichtszustand als

die Superposition zweier in umgekehrtem Sinne verlaufender Prozesse auffassen, nämlich

1. einer Bewegung der suspendierten Substanz unter der Wirkung der auf jedes einzelne suspendierte Teilchen wirkenden Kraft K ,

2. eines Diffusionsvorganges, welcher als Folge der ungeordneten Bewegungen der Teilchen infolge der Molekularbewegung der Wärme anzufassen ist.

Haben die suspendierten Teilchen Kugelform (Kugelradius P) und besitzt die Flüssigkeit den Reibungskoeffizienten k , so erteilt die Kraft K dem einzelnen Teilchen die Geschwindigkeit ¹⁾

$$\frac{K}{6 \pi k P},$$

und es treten durch die Querschnittseinheit pro Zeiteinheit

$$\frac{\nu K}{6 \pi k P}$$

Teilchen hindurch.

Bezeichnet ferner D den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz und μ die Masse eines Teilchens, so treten pro Zeiteinheit infolge der Diffusion

$$- D \frac{\partial (\mu \nu)}{\partial x} \text{ Gramm}$$

oder

$$- D \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

Teilchen durch die Querschnittseinheit. Da dynamisches Gleichgewicht herrschen soll, so muß sein:

$$(2) \quad \frac{\nu K}{6 \pi k P} - D \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0.$$

Aus den beiden für das dynamische Gleichgewicht gefundenen Bedingungen (1) und (2) kann man den Diffusionskoeffizienten berechnen. Man erhält:

$$D = \frac{T}{N} \frac{1}{6 \pi k P}.$$

Der Diffusionskoeffizient der suspendierten Substanz hängt also

1) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26. Vorlesung § 4.

außer von universellen Konstanten und der absoluten Temperatur nur vom Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit und von der Größe der suspendierten Teilchen ab.

§ 4. Über die ungeordnete Bewegung von in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen und deren Beziehung zur Diffusion.

Wir gehen nun dazu über, die ungeordneten Bewegungen genauer zu untersuchen, welche, von der Molekularbewegung der Wärme hervorgerufen, Anlaß zu der im letzten Paragraphen untersuchten Diffusion geben.

Es muß offenbar angenommen werden, daß jedes einzelne Teilchen eine Bewegung ausführe, welche unabhängig ist von der Bewegung aller anderen Teilchen; es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen als voneinander unabhängige Vorgänge aufzufassen sein, solange wir diese Zeitintervalle nicht zu klein gewählt denken.

Wir führen ein Zeitintervall τ in die Betrachtung ein, welches sehr klein sei gegen die beobachtbaren Zeitintervalle, aber doch so groß, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ von einem Teilchen ausgeführten Bewegungen als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind.

Seien nun in einer Flüssigkeit im ganzen n suspendierte Teilchen vorhanden. In einem Zeitintervall τ werden sich die X -Koordinaten der einzelnen Teilchen um Δ vergrößern, wobei Δ für jedes Teilchen einen anderen (positiven oder negativen) Wert hat. Es wird für Δ ein gewisses Häufigkeitsgesetz gelten; die Anzahl dn der Teilchen, welche in dem Zeitintervall τ eine Verschiebung erfahren, welche zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, wird durch eine Gleichung von der Form

$$dn = n \varphi(\Delta) d\Delta$$

ausdrückbar sein, wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1$$

und φ nur für sehr kleine Werte von Δ von Null verschieden ist und die Bedingung

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$$

erfüllt.

Wir untersuchen nun, wie der Diffusionskoeffizient von φ abhängt, wobei wir uns wieder auf den Fall beschränken, daß die Anzahl ν der Teilchen pro Volumeneinheit nur von x und t abhängt.

Es sei $\nu = f(x, t)$ die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, wir berechnen die Verteilung der Teilchen zur Zeit $t + \tau$ aus deren Verteilung zur Zeit t . Aus der Definition der Funktion $\varphi(\Delta)$ ergibt sich leicht die Anzahl der Teilchen, welche sich zur Zeit $t + \tau$ zwischen zwei zur X-Achse senkrechten Ebenen mit den Abszissen x und $x + dx$ befinden. Man erhält:

$$f(x, t + \tau) dx = dx \cdot \int_{\Delta = -\infty}^{\Delta = +\infty} f(x + \Delta) \varphi(\Delta) d\Delta.$$

Nun können wir aber, da τ sehr klein ist, setzen:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ferner entwickeln wir $f(x + \Delta, t)$ nach Potenzen von Δ :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \dots \text{in inf.}$$

Diese Entwicklung können wir unter dem Integral vornehmen, da zu letzterem nur sehr kleine Werte von Δ etwas beitragen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \tau &= f \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi(\Delta) d\Delta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite verschwindet wegen $\varphi(x) = \varphi(-x)$ das zweite, vierte etc. Glied, während von dem ersten, dritten, fünften etc. Gliede jedes folgende gegen das vorhergehende sehr klein ist. Wir erhalten aus dieser Gleichung, indem wir berücksichtigen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

und indem wir

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D$$

setzen und nur das erste und dritte Glied der rechten Seite berücksichtigen:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung der Diffusion, und man erkennt, daß D der Diffusionskoeffizient ist.

An diese Entwicklung läßt sich noch eine wichtige Überlegung anknüpfen. Wir haben angenommen, daß die einzelnen Teilchen alle auf dasselbe Koordinatensystem bezogen seien. Dies ist jedoch nicht nötig, da die Bewegungen der einzelnen Teilchen voneinander unabhängig sind. Wir wollen nun die Bewegung jedes Teilchens auf ein Koordinatensystem beziehen, dessen Ursprung mit der Lage des Schwerpunktes des betreffenden Teilchens zur Zeit $t = 0$ zusammenfällt, mit dem Unterschiede, daß jetzt $f(x, t) dx$ die Anzahl der Teilchen bedeutet, deren X -Koordinaten von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t$ um eine Größe *gewachsen* ist, welche zwischen x und $x + dx$ liegt. Auch in diesem Falle ändert sich also die Funktion f gemäß Gleichung (1). Ferner muß offenbar für $x \geq 0$ und $t = 0$

$$f(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = n$$

sein. Das Problem, welches mit dem Problem der Diffusion von einem Punkte aus (unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der diffundierenden Teilchen) übereinstimmt, ist nun mathematisch vollkommen bestimmt; seine Lösung ist:

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

Die Häufigkeitsverteilung der in einer beliebigen Zeit t erfolgten *Lagenänderungen* ist also dieselbe wie die der zu-

falligen Fehler, was zu vermuten war. Von Bedeutung aber ist, wie die Konstante im Exponenten mit dem Diffusionskoeffizienten zusammenhängt. Wir berechnen nun mit Hilfe dieser Gleichung die Verrückung λ_x in Richtung der X-Achse, welche ein Teilchen im Mittel erfährt, oder — genauer ausgedrückt — die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Verrückungen in Richtung der X-Achse; es ist:

$$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2 D t}.$$

Die mittlere Verschiebung ist also proportional der Quadratwurzel aus der Zeit. Man kann leicht zeigen, daß die Wurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der *Gesamtverschiebungen* der Teilchen den Wert $\lambda_x \sqrt{3}$ besitzt.

§ 5. Formel für die mittlere Verschiebung suspendierter Teilchen. Eine neue Methode zur Bestimmung der wahren Größe der Atome.

In § 3 haben wir für den Diffusionskoeffizienten D eines in einer Flüssigkeit in Form von kleinen Kugeln vom Radius P suspendierten Stoffes den Wert gefunden:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6 \pi \eta P}.$$

Ferner fanden wir in § 4 für den Mittelwert der Verschiebungen der Teilchen in Richtung der X-Achse in der Zeit t :

$$\lambda_x = \sqrt{2 D t}.$$

Durch Eliminieren von D erhalten wir:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3 \pi \eta P}}.$$

Diese Gleichung läßt erkennen, wie λ_x von T , η und P abhängen muß.

Wir wollen berechnen, wie groß λ_x für eine Sekunde ist, wenn N gemäß den Resultaten der kinetischen Gastheorie $6 \cdot 10^{23}$ gesetzt wird; es sei als Flüssigkeit Wasser von 17°C . gewählt ($\eta = 1,35 \cdot 10^{-2}$) und der Teilchendurchmesser sei 0,001 mm. Man erhält:

$$\lambda_x = 8 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,8 \text{ Mikron}.$$

Die mittlere Verschiebung in 1 Min. wäre also ca. 6 Mikron.

Umgekehrt läßt sich die gefundene Beziehung zur Bestimmung von N benutzen. Man erhält:

$$N = \frac{t}{\lambda_x^3} \cdot \frac{RT}{3\pi kP}.$$

Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!

Bern, Mai 1905.

(Eingegangen 11. Mai 1905.)

4 Del principi de relativitat a la teoria de la relativitat especial

El tercer dels articles d'Einstein que fan de 1905 un any singular va arribar a la redacció d'*Annalen der Physik* el 30 de juny d'aquell any. Retrospectivament és clar que «Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment» («Zur Elektrodynamik bewegter Körper») assenta les bases de la teoria de la relativitat especial, tot i que en aquell moment ningú no ho hauria dit, això; i de fet ningú no va dir-ho ni el 1905 ni els anys immediatament posteriors, perquè a l'article no s'hi presentava cap *teoria de la relativitat* ni era encara possible discriminar entre la teoria *especial* i la *general*, teoria de la *relativitat general* la teoria de la gravitació que el mateix Einstein havia de completar deu anys després.

I doncs, què contenia l'article? Einstein hi proposava una solució als problemes que afligien l'electrodinàmica i l'òptica —unificades en la dècada de 1860 per la revelació teòrica que la llum és un fenomen electromagnètic—, solució que passava per l'entronització del principi de relativitat, vàlid fins aleshores en l'àmbit de la mecànica, i el desenvolupament d'una nova cinemàtica, compatible amb un segon principi segons el qual la llum es movia en el buit amb velocitat constant independentment del moviment de la font emissora (és a dir, que un observador que va a trobar un raig de llum en mesura la mateixa velocitat que si l'espera immòbil). A la primera part de l'article es presentava la nova cinemàtica i, a la segona, les seves implicacions revolucionàries per a l'electrodinàmica. Poc després de publicar-lo, Einstein s'adonà que el principi de relativitat tenia una implicació revolucionària més, pel que fa a la relació entre massa i energia, i redactà un article suplementari de tres pàgines («La inèrcia d'un cos, depèn de l'energia que conté?»), que va ser rebut als *Annalen der Physik* el 27 de setembre de 1905 i publicat el novembre d'aquell any prodigiós.

Einstein va considerar originalment que els seus treballs tractaven sobre el principi de relativitat, i així s'hi va referir en articles

de recerca i de divulgació fins al 1914. Max Planck va usar el terme *Relativtheorie* el 1906 i a partir de 1907, induït per altres físics, Einstein va utilitzar ocasionalment la seva variant *Relativitätstheorie*; però només va adoptar la denominació actualment consolidada de *teoria de la relativitat especial* (*die spezielle Relativitätstheorie*) a partir de 1915, per distingir-la de la teoria de la relativitat general (*die allgemeine Theorie*), «la generalització més ambiciosa imaginable del que coneixem com a *teoria de la relativitat*».¹ Feta aquesta precisió —que haurem de complementar més avall amb una altra sobre la contribució d'altres físics, abans i després de 1905, a la gènesi de la relativitat—, per simplificar em referiré al llarg d'aquesta introducció a «Zur elektrodynamik» com el primer article sobre relativitat.

El terme relativitat és responsable de bona part dels equívocs que envolten la teoria des de la seva aparició, però el seu sentit físic és precís: els físics parlen de relativitat per significar que estats de moviment aparentment diferents són del tot equivalents i indistingibles. En aquest sentit la relativitat no entra en la física de la mà d'Einstein, ni de l'electrodinàmica del segle XIX, sinó de la mecànica del segle XVII i els debats entorn del moviment. Galileu parla obertament de relativitat en la seva defensa cèlebre i polèmica del sistema copernicà, el *Diàleg sobre els dos màxims sistemes del món* (1632), que conté diversos arguments a favor del moviment de la Terra al voltant del Sol. Un dels arguments més sòlids per convèncer el lector del *Diàleg* que la Terra es pot moure sense que ens n'adonem es basa en la impossibilitat de distingir entre el repòs i el moviment uniforme —un moviment en línia recta i amb velocitat

¹Citat a EINSTEIN (2000), x. Sobre la denominació de la teoria, vegeu la nota editorial «Einstein on the theory of relativity» (STACHEL (1989), 254). Sobre la historiografia de la relativitat, vegeu CASSIDY (1986) i STALEY (1998). Aquesta nota introductòria està basada en la que vaig escriure per a EINSTEIN (2000), en l'elaboració de la qual van ser particularment rellevants DARRIGOL (1990) i la nota editorial citada; en revisar aquell text he tingut particularment en compte les aportacions recents de DARRIGOL (2004), GALISON (2003) i STALEY (en premsa).

constant—, ja que, per tots aquells que participen d'aquesta mena de moviment, «és com si aquest [moviment] no existís». Galileu fa una representació mental concreta d'aquesta intuïció. Proposa al lector d'imaginar que és a la bodega d'un vaixell, capaç —si més no en la ment del físic— de moure's en línia recta a velocitat constant amb exquisida suavitat, i li proposa també d'imaginar tot d'experiències mecàniques simples, com ara saltar d'una banda a l'altra o observar la caiguda d'una gota dins un recipient de coll estret col·locat a sota. Aquestes experiències es duen a terme mentalment amb el vaixell aturat a port i amb el vaixell en moviment uniforme. Galileu fa reconèixer al lector que si les fes de debò el resultat seria idèntic, de manera que no percebria «cap canvi en els efectes esmentats», ni podria determinar a partir d'aquests «si la nau està quieta o es mou».² Aquest és el reconeixement primigeni d'un fenomen relativista: repòs i moviment rectilini i uniforme són perfectament indistingibles a través de la mecànica, i en el segle XVII qui diu la mecànica diu la física. Raonaments anàlegs van conduir Einstein vers la relativitat especial, i una intuïció física d'aquesta mateixa mena li va permetre entendre, el 1907, la identitat de les masses inercial i gravitatòria i el va posar sobre la pista de la relativitat general.

Totes les experiències que descriu Galileu tenen a veure amb la mecànica i, per això, d'aquest principi se'n va dir *principi de relativitat de la mecànica* (o *principi de relativitat de Galileu*). Tots els sistemes en moviment relatiu de translació uniforme són mecànicament equivalents i, per tant, cap no pot ser distingit com aquell que està en repòs respecte de l'espai absolut newtonià, «que resta homogeni i inamovible per la seva pròpia naturalesa, sense relació amb res exterior» (I. Newton, *Principis matemàtics de la filosofia natural*, 1687, «Definicions, escoli»). Naturalment, també les fórmules que descriuen els fenòmens seran idèntiques, o *invariants sota una transformació de Galileu*, la qual cosa ens permet

²GALILEI (1890-1909), vol. 7, 212-213; trad. cast. a GALILEI (1994), 162-163.

reformular més exactament aquest primer principi de relativitat: les lleis de la mecànica són *invariants* quan passem d'un sistema de referència en repòs a un altre en moviment de translació rectilínia i uniforme respecte del primer (sistemes *inercials*).³

Al final del segle XIX, el principi de relativitat era un element integral dels llibres de text de mecànica racional, com ara el que Einstein va utilitzar per preparar l'examen d'ingrés a la Polytechnische Schule de Zuric.⁴ Però valia també per a la resta de la física?

4.1 Antecedents

«Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment»... El títol d'aquest article remet directament al context físic que el va suscitar; i és que no es pot entendre la gènesi de la relativitat al marge dels problemes que plantejava la formulació de l'electrodinàmica, una branca de la física que havia madurat en la segona meitat del segle XIX i assolit, al tombant del XX, una posició preminent dins la disciplina, tant pel que fa a la seva significació tecnològica com teòrica. Einstein es familiaritzà ben aviat amb l'electrodinàmica en totes les seves dimensions; de fet hi estava literalment familiaritzat, ja que el seu pare i el seu oncle posseïen una empresa electrotècnica. A les seves *Notes autobiogràfiques* (1949), Einstein descriu l'electromagnetisme com «la matèria més fascinant» de la seva època d'estudiant.⁵

Als setze anys Einstein va dedicar el seu primer assaig científic a una «Investigació de l'estat de l'èter en un camp magnètic». Hi descrivia els camps elèctric i magnètic com a estats de moviment de

³Matemàticament, si prenem l'eix x en la direcció de moviment relatiu, això implica que les coordenades d'espai i de temps de tots dos sistemes estan relacionades per l'anomenada *transformació de Galileu* ($x' = x \pm vt$, $t' = t$).

⁴STACHEL (1989), «Einstein on the theory of relativity», 255 i 258.

⁵EINSTEIN (1949), 32. STACHEL (1987) reproduïx documents essencials sobre els anys de formació d'Einstein; entre les notes editorials rellevants d'aquest volum hi ha «Einstein as a student of physics, and his notes on H. F. Weber's course» i «Einstein on the Electrodynamics of Moving Bodies».

l'èter, i hi esmentava «els magnífics experiments» de H. Hertz, que el 1888 havia generat i detectat ones electromagnètiques i demostrat experimentalment la naturalesa electromagnètica de la llum. L'obra de Hertz l'impressionà també per la seva significació teòrica. Hertz era un membre destacat dels maxwellians, el grup de físics que en les dues darreres dècades del segle XIX va articular la teoria de J. C. Maxwell.⁶ A «Zur elektrodynamik» Einstein parla de «les equacions de Maxwell-Hertz» i les dóna en la forma en què ho havia fet Hertz en un treball de 1890 titulat precisament «Sobre les equacions fonamentals de l'electrodinàmica per a cossos en moviment»:⁷

$$\frac{1}{c} \dot{\vec{E}} = \nabla \times \vec{H} \quad \frac{1}{c} \dot{\vec{H}} = -\nabla \times \vec{E},$$

A més dels treballs citats, ens consta que Einstein va llegir, entre d'altres, els manuals de P. Drude (*Fonaments electromagnètics de la física de l'èter*) i A. Föppl (*Introducció a la teoria maxwelliana de l'electricitat*), i *Èter i matèria*, de J. Larmor.⁸ La correspondència amb Mileva Marič, companya d'estudis a la Polytechnische Schule i primera dona d'Einstein, testimonia el seu interès per aquesta qüestió i l'abast d'aquestes lectures. Malgrat que Maxwell i, amb ell, la majoria de físics no podien concebre que les ones electromagnètiques no fossin estats de vibració d'una forma subtilíssima de matèria, *l'èter*, les cartes a Mileva revelen els primers dubtes sobre la naturalesa i l'existència d'aquesta substància. El 1899 Einstein li escrivia: «Cada cop estic més convençut

⁶HERTZ (1888), inclòs a GARCIA DONCEL i ROQUÉ (1990). La denominació *maxwellians* és de HUNT (1991); sobre el desenvolupament de l'electrodinàmica vegeu també DARRIGOL (2000), BUCHWALD (1985) i JUNGNIKKEL i MCCORMACH (1986).

⁷HERTZ (1890). Einstein segueix Hertz i escriu aquestes equacions utilitzant components cartesianes i no vectors. Hem fet $\vec{E} = (X, Y, Z)$ i $\vec{H} = (L, M, N)$ i, igual que Einstein, hem canviat el signe dels rotacionals, perquè Hertz utilitza un sistema de coordenades levogir.

⁸DRUDE (1894), FÖPPL (1894) i LARMOR (1900).

que l'electrodinàmica dels cossos en moviment, en la seva formulació actual, no s'adiu amb la realitat, i que hauríem de poder formular-la d'una manera més senzilla. La introducció en les teories elèctriques del terme *èter* ens fa pensar en un medi i parlar del seu moviment, però crec que aquesta expressió no té sentit físic».⁹ Era previsible que el moviment dels cossos a través de l'èter afectés els fenòmens electromagnètics, i possibilités allò que els fenòmens de la mecànica i el principi de relativitat feien impossible: distingir el repòs del moviment uniforme. Però totes les experiències òptiques dutes a terme en aquest sentit van tenir un resultat negatiu, inclosos els experiments d'interferometria, precisos fins a segon ordre en v/c , fets el 1887 per Albert A. Michelson (1852–1931) i Edward W. Morley (1838–1923) a la Case School for Applied Science de Cleveland, als Estats Units, sobre els quals hem de tornar més endavant.¹⁰

Els intents per explicar la insensibilitat dels fenòmens electromagnètics al moviment respecte de l'èter es van centrar en l'estudi de les relacions entre èter i matèria. Lluny de percebre una crisi, molts físics consideraven que l'electrodinàmica era a punt d'inaugurar una nova era de la física, en la qual succeiria la mecànica com a teoria fonamental.¹¹ La forma més influent d'electrodinàmica dels cossos en moviment era, entorn de 1900, la de H. A. Lorentz. En la formulació de Lorentz de la teoria de Maxwell, el resultat negatiu de l'experiment de Michelson-Morley s'explicava pel canvi

⁹Carta d'A. Einstein a M. Marič, 10 d'agost de 1899 (BECK (1987), 130–131). El mateix volum conté la resta de cartes descobertes el 1986 pels editors, corresponents al període 1897–1902; són un total de 51, de les quals 41 són escrites per Einstein i 10 per Mileva. Vegeu-ne la traducció al castellà a EINSTEIN i MARIČ (1990), així com la introducció d'aquest volum, a càrrec de J. M. Sánchez Ron. La correspondència entre Einstein i Marič ha enriquit substancialment la nostra comprensió de la formació científica i la personalitat d'Einstein.

¹⁰MICHELSON i MORLEY (1887), traduït parcialment a WILLIAMS (1968), 34–45 de l'edició castellana. L'experiment va ser concebut per Michelson, que va dur a terme les primeres mesures el 1881 (MICHELSON, 1881).

¹¹KRAGH (1999), cap. 8.

en les dimensions dels instruments de mesura en la direcció del seu moviment a través de l'èter. Aquesta contracció, suggerida independentment per George FitzGerald (1851–1901), responia a modificacions reals d'ordre molecular.¹² Lorentz subscrivia una ontologia dual de matèria i èter, segons la qual la matèria (àtoms, molècules, ions) es movia lliurement a través d'un èter estacionari. El 1895 va introduir el *teorema dels estats corresponents*: tota experiència d'òptica o d'electrostàtica portada a terme en un laboratori en moviment respecte de l'èter, es correspon amb una experiència *fictícia* del mateix tipus en un laboratori en repòs respecte de l'èter, en el qual totes les dimensions longitudinals s'han dilatat en la proporció $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ i els temps s'han retardat localment en vx/c^2 . Els camps transformats eren mers artificis de càlcul i el temps local, un temps «aparent». La teoria explicava els resultats experimentals fins a segon ordre en v/c . El 1904 Lorentz va modificar les relacions entre les coordenades d'un i altre sistema, i va proposar-ne de noves que explicaven els resultats en tots els ordres de magnitud: ¹³

$$x = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Aquestes equacions de transformació van ser batejades com a *transformacions de Lorentz* pel físic, matemàtic, enginyer i filòsof francès H. Poincaré:¹⁴ «La raó per la qual podem conferir al sistema un moviment de translació sense modificar l'aparença dels

¹²Sobre les teories de l'electró en relació amb el desenvolupament de la relativitat, vegeu HIROSIGE (1966, 1976). DARRIGOL (1996) conté una discussió lúcida i gens teleològica dels orígens electrodinàmics de la relativitat.

¹³LORENTZ (1895). Sobre les aportacions de Lorentz, vegeu HIROSIGE (1966), MCCORMACH (1970) i PAIS (1984), cap. 8.

¹⁴«L'idée de Lorentz peut se résumer ainsi: si l'on peut, sans qu'aucun des phénomènes apparents soit modifié, imprimer à tout le système une translation commune, c'est que les équations d'un milieu électromagnétique ne sont pas altérées par certaines transformations, que nous appellerons transformations de Lorentz; deux systèmes, l'un immobile, l'autre en translation, deviennent ainsi l'image exacte l'un de l'autre» (POINCARÉ (1906), 130).

fenòmens, és que les equacions electromagnètiques no varien si les sotmetem a determinades transformacions, que anomenaré transformacions de Lorentz; dos sistemes, un en repòs i l'altre en translació, esdevenen així la imatge exacta l'un de l'altre.» És evident per què Poincaré comparteix amb Lorentz un lloc preeminent entre els precursors de la relativitat. Com a autor prolífic, capaç d'utilitzar diferents registres, els textos *relativistes* de Poincaré van aparèixer entre 1898 i 1908 en forma d'article en una revista de filosofia («La mesure du temps», 1898), d'assaig d'alta divulgació (*La science et l'hypothèse*, 1902), de conferència plenària en una exposició internacional (Saint Louis, 1904) i d'articles en revistes especialitzades («Sur la dynamique de l'électron», 1905, 1906 i 1908). L'electrodinàmica va ser, tant per Poincaré com per Einstein, el punt de partida de tota consideració relativista, i els seus punts d'arribada són en algun cas tan propers que llegir-los críticament, sense calibrar-los amb les idees d'Einstein resulta molt difícil. Poincaré, en efecte, sosté que és impossible discernir el moviment absolut, qüestiona la simultaneïtat absoluta d'esdeveniments distants («No hi ha temps absolut; l'afirmació que dos intervals de temps són iguals no té, en si mateixa, cap sentit, i no en pot adquirir un si no és per convenció; no només ens manca la intuïció directa de la igualtat de dos intervals temporals, sinó també la de la simultaneïtat de dos esdeveniments que tenen lloc en escenaris diferents, com ja he explicat en un article titulat "La mesure du temps"»),¹⁵ i afirma de manera explícita, com hem vist, la covariància de Lorentz. Einstein coneixia alguns d'aquests treballs, especialment *La science et l'hypothèse*, que va poder llegir en l'edició alemanya de 1904, i continua el debat sobre la contribució d'un i altre; però abans d'ocupar-nos-en breument hem de completar la nostra impressió de conjunt sobre els antecedents de la relativitat.

Si els problemes de l'electrodinàmica formen el context primordial de la gènesi de la relativitat, amb el temps s'ha fet més i més evident que aquest no és l'únic context rellevant. No és aquest

¹⁵POINCARÉ (1902), 111.

el lloc de discutir la importància relativa d'un o altre context, de manera que ens acontentarem de deixar constància de la seva existència i de la seva possible rellevància.¹⁶ Sense sortir de la física trobem, en primer lloc, el context termodinàmic. Einstein mateix va reconèixer, retrospectivament, que l'estudi dels fenòmens tèrmics i de la teoria cineticomolecular va mostrar-li la importància de principis de gran abast, com ara els de la termodinàmica: «Cap al 1900... ja veia que ni la mecànica ni l'electrodinàmica podien aspirar a ser exactament vàlides (llevat de casos límit). Veia allunyar-se la possibilitat de descobrir les lleis vertaderes mitjançant esforços constructius basats en fets coneguts. Com més m'hi esforçava més em convencia que només el descobriment d'un principi formal universal ens conduiria a resultats segurs. El meu model era la termodinàmica.»¹⁷

El context filosòfic és un altre element indissociable de les reflexions relativistes d'Einstein. La lectura i discussió de l'obra d'E. Mach, David Hume (1711-1776) o del Poincaré filòsof, en companyia dels seus amics M. Solovine i C. Habicht, amb els quals formava l'Acadèmia Olímpia, van ser directament rellevants en la crítica dels conceptes fonamentals de l'electrodinàmica i la cinemàtica.¹⁸ Aquestes lectures van fer que Einstein fos conscient de la relació problemàtica entre la realitat i les nostres representacions de la realitat, i de la «distinció entre allò que és accessible a la nostra experiència i allò que resta, per dir-ho així, amagat rere la cortina del món perceptible».¹⁹ De Mach, que el 1897 havia descartat el temps absolut com una «concepció metafísica vana

¹⁶Vegeu DARRIGOL (1996), que utilitza el terme *context* sense intentar definir-lo, com tampoc no ho farem nosaltres.

¹⁷EINSTEIN (1949), 52 (66 de la trad. cast.). Sobre la rellevància de la termodinàmica en la gènesi de la relativitat, vegeu KLEIN (1967), MCCORMMACH (1970), ABIKO (1991) i la breu valoració que en fa DARRIGOL (1996), 244.

¹⁸STACHEL (1989), XXIV-XXV. PATY (1993) argumenta, però, que Einstein va adquirir les primeres nocions filosòfiques llegint textos de física com HERTZ (1892) i DRUDE (1894).

¹⁹GALISON (2003), 239.

[perquè] no es pot mesurar respecte de cap moviment», va aprendre a malfiar-se dels conceptes que no es podien definir amb referència a un procediment de mesura. Pel que fa a Hume, Einstein va afirmar el 1915 que havia estudiat *A Treatise of Human Nature* (1739) «amb avidesa i admiració poc abans de descobrir la teoria de la relativitat» i que aquesta obra va exercir sobre el seu pensament una gran influència: «Molt probablement, sense aquests estudis filosòfics no hauria arribat a la solució.»²⁰ Els editors dels *Albert Einstein collected papers* han resumit així la qüestió:²¹

«Les lectures fundacionals d'Einstein el van preparar per revisar els fonaments cinemàtics de la física, pel fet de dirigir l'atenció vers diverses qüestions rellevants, com ara el problema de la formació de conceptes científics (com els d'espai i temps), el paper de les convencions en el pensament científic (per exemple la convenció necessària per definir la simultaneïtat d'esdeveniments distants) o el lloc dels principis formals, com el de relativitat, en l'estructura de les teories científiques.»

A banda de l'influx de la física i la filosofia, altres autors han relacionat la relativitat amb la tecnologia i la indústria elèctriques. Al tombant de segle, l'electrodinàmica era la branca de la física de més relleu industrial, i les seves connexions tecnològiques, del telègraf a les turbines i els refrigeradors, revertien en benefici de la disciplina en forma de laboratoris i recursos. No estem, doncs, davant contextos —el físic i el tecnològic— realment independents. La denominació condescendent d'*aplicacions* de l'electromagnetisme amaga el fet que l'electrotecnologia era un front molt disputat de debats amb implicacions teòriques, tal com evidencia, entre molts altres exemples, la carrera de William Thomson, *lord Kelvin*.²² Que el procés de retroalimentació entre la física acadèmica i

²⁰Carta d'A. Einstein a M. Schlick, 14 de desembre de 1915 (HENTSCHEL (1998), 221), citat a GALISON (2003), 239.

²¹STACHEL (1989) «Introduction», xxv.

²²SMITH i WISE (1989).

la industrial ja estava en marxa en la dècada de 1870, ho mostra el fet que Maxwell s'hi referís en el prefaci del seu cèlebre *Treatise*:²³ «Les importants aplicacions de l'electromagnetisme a la telegrafia reverteixen a favor de la ciència pura, perquè donen valor comercial a les mesures elèctriques de precisió i permeten als electricistes [*electricians*] usar aparells a una escala que depassa de molt la d'un laboratori ordinari». La Polytechnische Schule suïssa on es va formar Einstein no era sinó una de les institucions d'ensenyament superior creades arreu d'Europa en la segona meitat del XIX, símptomes i catalitzadors alhora de la creixent interrelació entre ciència, indústria, economia i política. És creïble una història del segle XIX que ignori la revolució en el transport i les comunicacions que van afavorir el ferrocarril i el telègraf, abans fins i tot de la introducció de la telegrafia sense fils?

Einstein no només participava en aquests desenvolupaments com a ciutadà d'un país avançat o com a estudiant de física, sinó que estava immers en l'entorn tecnològic de l'electricitat. Ja hem apuntat que la seva família era la propietària de J. Einstein & Cie., una petita empresa electrotècnica que no va sobreviure a la concentració del sector, però que va donar la possibilitat al jove Einstein d'examinar de prop dinamos, electròmetres i altres dispositius molt similars als que, anys després, serien objecte dels seus informes minuciosos com a expert i, fins i tot, com a autor de patents. L'examen de patents va esmolar el sentit crític, la capacitat de visualització i les habilitats expositives d'Einstein, i li va permetre de preparar a consciència i amb relativa calma el retorn al món acadèmic («La redacció dels informes sobre patents va ser una benedicció. Em va donar l'oportunitat de pensar en física»), fins al punt que descriu l'etapa a Berna com una «retirada tàctica».²⁴

El context tecnològic no és probablement aliè al fet que l'article sobre relativitat s'obris amb una discussió del fenomen d'inducció

²³MAXWELL (1873), VII.

²⁴SCHULMANN (1993); vegeu també HUGHES (1993), 31. GALISON (2003) argumenta la importància de les màquines i la tecnologia en l'obra d'Einstein.

en què es basa el funcionament de les dinamos unipolars,²⁵ i encara menys al fet que el procediment de sincronització de rellotges distants mitjançant l'intercanvi de senyals lluminosos estigués directament relacionat amb un dels signes més evidents del progrés tecnològic i científic de l'època: la introducció, el 1884, del temps universal de Greenwich i la creació de xarxes de comunicació sofisticades sobre les quals se sustentaven els poders nacionals i colonials. Les zones horàries eren crucials per a la competència entre nacions, per a la guerra, el transport i el comerç.

Recentment, Peter Galison ha argumentat de manera detallada que la relativitat va néixer de la conjunció entre física (electrodinàmica), filosofia i tecnologia (coordinació horària a escala planetària); aquesta triple conjunció es dona en els dos autors que han estat vanament enfrontats com a pares de la relativitat.²⁶

«Des de la nostra perspectiva, mirar d'avaluar Einstein i Poincaré amb la mateixa plantilla és la part menys interessant de la història del temps i la simultaneïtat. És molt més important situar-los tots dos en els nodes de la coordinació horària al tombant de segle, i mirar de comprendre la manera en què cadascú va navegar per la tecnologia, la física i la filosofia, i es va esforçar per arrencar la simultaneïtat del firmament metafísic i dur-la a la Terra com una quantitat definida a través d'un procediment.»

Poincaré, en efecte, s'implicà directament en els problemes de sincronització des de la presidència del Bureau des Longitudes; per ell, l'intercanvi de senyals entre observadors distants no tenia un significat purament teòric o filosòfic, sinó un valor eminentment pràctic i, fins i tot, econòmic. Einstein no va tenir mai responsabilitats similars, però de la mateixa manera que hem ignorat el

²⁵MILLER (1981a), PYENSON (1982).

²⁶GALISON (2003), 311. Sobre l'abast de la interacció entre Einstein i Poincaré és imprescindible consultar, a més, la revisió recent DARRIGOL (2004).

Poincaré metròleg, hem restat importància a l'Einstein examinador de patents. A l'Oficina Suïssa de Patents, a Berna, Einstein estava envoltat de sol·licituds que feien referència a dispositius electromagnètics relacionats amb la sincronització horària.

La cristallització de les idees d'Einstein sobre la llum, l'espai i el temps va estar, doncs, condicionada per la física però també per la filosofia o la tecnologia, dominis de coneixement i de pràctiques que presentaven, aleshores, i probablement presenten encara, àmplies interseccions, i que no fóra prudent de considerar com a compartiments estancs en la ment d'Einstein o en la de la resta de protagonistes d'aquesta història. La interacció entre aquests contextos i la reconstrucció del camí seguit per Einstein fins a la publicació de l'article sobre electrodinàmica no són gens senzilles. Més enllà de les dades que acabem d'apuntar, el nostre coneixement sobre el procés que va dur Einstein a la relativitat especial és fragmentari, especialment pel que fa al període 1902–1905. Einstein va explicar a un dels seus biògrafs que «entre la concepció de la idea de la relativitat especial i la compleció de la publicació corresponent van passar cinc o sis setmanes», però és clar que només es referia a l'estadi final d'un procés que, com hem vist, havia començat anys enrere, durant la seva etapa d'estudiant.²⁷

4.2 Contingut de «Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment»²⁸

«Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment» és un text singular en la història de la física, per l'audàcia dels seus principis i l'abast de les seves implicacions. El títol només descriu correctament la segona part de l'article, perquè la primera va més enllà de l'electrodinàmica: Einstein hi revisa de dalt a baix la mesura d'interval·ls d'espai i de temps i posa els fonaments d'una nova cinemàtica. El text és singular, també, per la manca de referències

²⁷Carta d'A. Einstein a C. Seelig, 11 de març de 1952, citat a STACHEL (1989), 264.

²⁸EINSTEIN (1905c).

al treball d'altres investigadors; només conté una expressió d'agraïment a l'amic Michele Besso i no dona cap clau explícita sobre els deutes intel·lectuals de l'autor.

L'article s'obre amb tres paràgrafs introductoris susceptibles de desconcertar el lector per la candidesa amb què s'hi fan afirmacions tan contundents. En el primer, Einstein discuteix breument una asimetria de naturalesa estètica (més que no pas empírica) que té a veure amb el moviment relatiu entre un imant i un conductor. En el segon, després d'una vaga referència als «intents fallits de constatar cap moviment de la Terra respecte del *medi lumínic*», Einstein introdueix els dos principis fonamentals: el de relativitat, en el sentit més ampli («les lleis que regulen els canvis d'estat dels sistemes físics són independents del fet que referim aquests canvis a l'un o l'altre dels dos sistemes de coordenades que es troben en moviment relatiu de translació uniforme»), i el de constància de la velocitat de la llum («la llum es propaga en l'espai buit amb una velocitat constant independent de l'estat de moviment del cos emissor»). Einstein avança que aquests principis li permetran de formular «una electrodinàmica dels cossos en moviment simple i coherent» i prescindir del concepte d'*èter*, que resultarà un concepte superflu. En el tercer, finalment, afirma que la seva teoria es basa en una nova cinemàtica i atribueix, enigmàticament, «les dificultats que assetgen l'electrodinàmica dels cossos en moviment» al fet que no s'hagi tingut prou en compte «que els enunciats de qualsevol teoria d'aquesta mena fan referència a relacions entre cossos rígids (sistemes de coordenades), rellotges i processos electromagnètics». Einstein ha resolt els problemes específics de l'electrodinàmica mitjançant un principi que afecta el conjunt de les lleis físiques; el principi de relativitat esdevé, d'aquesta manera, tal com Einstein mateix assenyala per primera vegada, «un valuós recurs heurístic».²⁹

²⁹EINSTEIN (2000), 26 (epígraf 14 de *La teoria de la relativitat especial*). El 1907, Einstein va replicar a Paul Ehrenfest, que havia caracteritzat la teoria d'Einstein com «un sistema tancat», que el principi de relativitat era només

Els «intents fallits» de què parla al segon paràgraf incloïen les observacions de l'aberració estel·lar, l'experiment de Fizeau i, sobretot, els experiments de Michelson-Morley. Sembla clar que Einstein coneixia aquests darrers experiments, però el seu paper en la gènesi de la relativitat continua intrigant-nos. No estem davant d'un artefacte historiogràfic, sinó d'un problema que ja es va plantejar en els primers anys de la teoria. El primer recull de textos sobre relativitat, aparegut el 1913, s'obria amb una discussió de Lorentz sobre l'experiment de Michelson-Morley, en un reconeixement implícit del paper causal d'aquesta experiència.³⁰ Des d'aleshores, la qüestió de l'èter en relació amb els experiments de Michelson-Morley ha ocupat un lloc central en les històries de la relativitat, en detriment d'altres contextos o situacions problemàtiques, com les que hem examinat en la secció anterior. Gerald Holton, un dels historiadors de la física que coneix millor la figura i l'obra d'Einstein, va concloure el 1969, després d'una anàlisi exhaustiva, que «el paper de l'experiment de Michelson en la gènesi de la teoria d'Einstein sembla que ha estat tan petit i indirecte que podem especular sobre si hauria tingut cap influència sobre el treball d'Einstein el fet que l'experiment no s'hagués dut a terme». Per Holton, el paper crucial atribuït a aquest experiment en els llibres de text de física respon a motivacions didàctiques i a l'influx d'una filosofia empirista de la ciència. Per la seva banda, Michel Paty ha matisat la conclusió de Holton i ha observat que aquest experiment és el més important dins una sèrie de resultats empírics (que inclouen les observacions de l'aberració estel·lar i l'experiència de Fizeau) que van ajudar Einstein a convèncer-se de la validesa universal del principi de relativitat; cap d'aquests experiments, però, no hauria estat determinant per si mateix.³¹ Els

«un principi heurístic» (BECK (1989), 236).

³⁰BLUMENTHAL (1913). El text de Lorentz és un fragment de LORENTZ (1895), el mateix que apareix en el recull de textos editat per WILLIAMS (1968), 46–50 de la traducció.

³¹HOLTON (1969); PATY (1993), 110–130. SWENSON (1972) descriu els intents per detectar el moviment de la Terra a través de l'èter fins als anys

escrits i les entrevistes en què Einstein va abordar posteriorment aquesta qüestió no són consistents i no permeten, doncs, d'emetre un judici definitiu. Però recentment Richard Staley ha portat molta llum a aquest problema en fer observar que la primera referència a l'experiment de Michelson-Morley en les publicacions d'Einstein és una referència intencionada i en si mateixa problemàtica.³²

Després de la introducció, l'article sobre relativitat presenta dues parts clarament diferenciades, una de general, sobre cinemàtica, i una altra de particular, sobre electrodinàmica. La part cinemàtica descansa sobre una anàlisi enganyosament simple, no matemàtica, de la simultaneïtat d'esdeveniments distants (secció 1, «Definició de la simultaneïtat»).³³ Einstein hi examina, de manera deliberadament ingènua, els procediments que ens permeten determinar si dos esdeveniments són simultanis. La seva anàlisi té una conseqüència no gens trivial, la desaparició del concepte de *temps absolut*: dos esdeveniments que són simultanis en un determinat sistema de referència deixen de ser-ho en un sistema de referència que es mou respecte del primer. Aquesta és la primera implicació del principi de la relativitat que no s'adiu amb la nostra percepció habitual, però no és l'única, perquè la relativitat de la simultaneïtat fa que la determinació d'interval·ls d'espai i de temps depengui de l'estat de moviment de l'observador (secció 2, «Sobre la relativitat de longituds i temps»). Des del punt de vista matemàtic, resulta senzill relacionar aquests interval·ls mitjançant les equacions que relacionen les coordenades espacials i temporals dels dos sistemes en moviment relatiu de translació uniforme (la transformació

1930. COLLINS i PINCH (1993), cap. 2, discuteixen el valor d'aquests experiments i la historiografia pertinent; els mateixos autors hi tornen el 1998, a «Afterword», 151–180. Vegeu també STACHEL (1987) nota editorial, «Einstein on the electrodynamics of moving bodies» i STACHEL (1982).

³²STALEY (1998), 279. A STALEY (en premsa) es revisa la qüestió en una monografia que probablement esdevindrà l'estudi més complet sobre l'experiment i la seva significació en la gènesi de la relativitat.

³³Sobre els recursos retòrics d'aquest article, vegeu ETXEBARRIA (1996), HOLTON (1993) i LOCKE (1992), cap. 4.

de Lorentz), que Einstein dedueix en la secció següent (secció 3, «Teoria de la transformació de coordenades i de temps del sistema en repòs a un altre en moviment relatiu de translació uniforme»). Les mateixes equacions permeten calcular amb quina velocitat es mou un objecte vist des de cadascun dels dos sistemes i verificar el principi de constància de la velocitat de la llum, que contradiu la llei clàssica d'addició de velocitats (secció 4, «Significació física de les equacions obtingudes, pel que fa a cossos rígids i rellotges en moviment», i secció 5, «Teorema d'addició de les velocitats»). Aquestes conseqüències només són antiintuïtives i paradoxals mentre no es renuncia a creure en l'existència d'un temps absolut, que existeix al marge de tota percepció sensible. D'altra banda, si no ens n'hem adonat abans és perquè la velocitat de la llum és tan gran que aquests efectes no són normalment perceptibles.

A la segona part de l'article, Einstein aplica el principi de relativitat a la resolució dels problemes de l'electrodinàmica dels cossos en moviment, i exposa les implicacions del seu treball en la teoria de l'electró: «Aquest mètode permet de resoldre tots els problemes de l'òptica dels cossos en moviment. El que és essencial és transformar la força elèctrica i magnètica de la llum, que és afectada pel moviment d'un cos, en un sistema de coordenades en repòs respecte d'aquest cos. D'aquesta manera els problemes de l'òptica dels cossos en moviment es redueixen a una sèrie de problemes de l'òptica dels cossos en repòs.» Un cop enunciades les equacions de Maxwell (secció 6, «Transformació de les equacions de Maxwell-Hertz per a l'espai buit. Sobre la naturalesa de les forces electromotrius generades pel moviment en un camp magnètic»), s'hi consideren l'efecte Doppler (secció 7), la pressió de radiació (secció 8), la conformitat de l'electrodinàmica amb el principi de relativitat (secció 9, «Transformació de les equacions de Maxwell-Hertz tenint en compte els corrents de convecció») i s'hi fa un esbós de la teoria de l'electró (secció 10, «Dinàmica de l'electró (lentament accelerat)»). L'article acaba amb algunes implicacions de la teoria que són contrastables experimentalment, referides al comportament de

l'electró en el si d'un camp electromagnètic. Einstein, però, encara no havia descobert la conseqüència més espectacular de la seva teoria.

4.3 L'equivalència entre massa i energia

Poc després de completar «Zur Elektrodynamik», Einstein s'adonà que el treball tenia una implicació sorprenent.³⁴

«Se m'ha acudit una altra conseqüència de l'article sobre electrodinàmica. El principi de relativitat, juntament amb les equacions de Maxwell, implica que la massa és una mesura directa de l'energia continguda en un cos: la llum transporta massa. La massa del radi hauria de disminuir sensiblement. La idea m'atreu i em diverteix, però no puc saber si el Senyor no m'ha pres el pèl i se n'està rient.»

La deducció de la fórmula $m = E/c^2$ ocupa les tres pàgines del darrer treball de l'any miraculós, «La inèrcia d'un cos, depèn de l'energia que conté?». L'argument fa referència a un procés físic concret —l'emissió, per un cos en repòs, de dos feixos de radiació electromagnètica en direccions oposades—, però Einstein assumeix que la relació ha de ser vàlida en general, ja que «no és necessari que l'energia sostreta al cos es transformi directament en energia de radiació».³⁵ Al final de l'article enuncia la relació $m = E/c^2$: «Si un cos emet l'energia L en forma de radiació, la seva massa disminueix en L/V^2 .» Els principis de conservació de la massa i de l'energia, establerts de manera independent per la física del segle XIX, responen, doncs, a la mateixa expressió: «El principi de conservació de la massa només és correcte, en un sistema físic aïllat, si l'energia resta constant; en aquest cas és equivalent al principi de conservació de l'energia.»³⁶

³⁴Carta d'A. Einstein a C. Habicht, juliol-setembre de 1905 (STACHEL (1989), 268).

³⁵Vegeu l'anàlisi de la deducció a STACHEL i TORRETTI (1982). Aquests autors dissipen els dubtes sobre la circularitat lògica de l'argument d'Einstein, expressats, entre d'altres, per JAMMER (1961), 177 i MILLER (1981b), 377.

³⁶BECK (1989), 287. Entre 1905 i 1907 Einstein va donar dues noves demos-

Einstein no era el primer de predir l'equivalència entre massa i energia ni la variació de la massa amb la velocitat, perquè totes dues relacions eren previsible per als físics que apostaven per la reducció de la massa a energia electromagnètica.³⁷ L'element innovador de la seva anàlisi era que l'equivalència no es limitava a una forma determinada d'energia, circumstància que, per Einstein, no feia sinó accentuar la confiança en la certesa de les seves conclusions. Això explica la seva impassibilitat davant els resultats adversos a la seva teoria obtinguts per Walter Kaufmann (1871–1947), basats en l'estudi de la desviació de raigs β (electrons) en un camp magnètic. L'escepticisme amb què va rebre aquests resultats no provenia només del fet que, després d'analitzar els resultats i el dispositiu experimental de Kaufmann amb la mateixa minuciositat que si es tractés d'una sol·licitud de patent, hi hagués trobat indicis raonables d'errors sistemàtics, sinó també del fet que els experiments afavorien les teories rivals de l'electró, que Einstein considerava «molt poc probables, perquè els seus supòsits fonamentals sobre la massa de l'electró en moviment no estan avalats per sistemes teòrics més comprensius».³⁸ Els anys 1908 i 1909, Alfred Bucherer (1863–1927) va publicar nous resultats favorables a la teoria de la relativitat, però no es van obtenir resultats inequívocs fins a la dècada següent.³⁹

Al final de l'article, Einstein va proposar d'utilitzar la radio-

tracions de l'equivalència entre massa i energia (EINSTEIN 1906c, 1907c), però fins el 1935 no n'aconseguirà una de satisfactòria en el sentit que no depengui de la teoria de Maxwell (EINSTEIN, 1935). Sobre aquesta darrera demostració, vegeu FLORES (1998).

³⁷WIEN (1901) és un clar exponent d'aquesta concepció electromagnètica de la matèria.

³⁸KAUFMANN (1906), EINSTEIN (1907c), epígraf 10, 461. Sobre els experiments de Kaufmann i la reacció d'Einstein, vegeu MILLER (1981b), 334–352, HENTSCHEL (1992), HON (1995).

³⁹BUCHERER (1908, 1909). LAUB (1910) fa balanç dels primers cinc anys de contrastació experimental de la teoria. LORENTZ (1931), vol. 3, cap. 7, «Experimental investigations on the mass of the electron» descriu detalladament la sèrie d'experiments posteriors.

activitat per contrastar les seves prediccions. Com que una determinació directa de la massa perduda pels elements radioactius semblava inviable, el 1907 va idear un mètode indirecte basat en la mesura del pes atòmic, el període de desintegració i l'energia emesa per una substància radioactiva.⁴⁰ Aquestes expectatives no es van satisfer, ja que la pèrdua de massa de les substàncies radioactives era massa petita perquè es pogués detectar experimentalment. Tot i això, molts físics van assumir enraonadament la validesa de la fórmula abans que, els anys 1930, se n'obtingués una confirmació experimental directa, gràcies a les reaccions nuclears induïdes pels primers acceleradors de partícules. A la fi de 1933, els primers experiments de creació i anihilació de partícules (parelles electró-positró) van mostrar que la massa d'una partícula podia convertir-se totalment en energia.⁴¹ La confirmació experimental d'aquesta conseqüència de la relativitat ha esdevingut, des d'aleshores, una qüestió rutinària en l'estudi de la física d'altres energies.

4.4 Primer impacte

Els dos articles sobre relativitat van passar inicialment gairebé desapercebuts i Einstein va començar a amoïnar-se, fins que una carta encoratjadora de Planck va confirmar-li que el seu treball estava estimulant noves recerques.⁴² Planck va ser un mentor decisiu, sobretot pel que fa a l'elaboració de la teoria per part dels seus assistents, i molt particularment Max Laue. Einstein mateix va tenir ocasió de tornar sobre els seus passos i donar a conèixer les seves idees en una forma més elaborada el 1907. Aquell any va escriure, a petició de J. Stark, editor del *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, un article de revisió que dona una mesura de l'interès que suscitaven les idees d'Einstein.⁴³

Einstein va aprofitar la introducció de l'article per fer un pri-

⁴⁰BECK (1989), 287-288.

⁴¹STUEWER (1993), ROQUÉ (1997).

⁴²«Einstein on the theory of relativity», STACHEL (1989), 266.

⁴³EINSTEIN (1907c), traduït parcialment a EINSTEIN (2000), 125-139.

mer esbós històric del desenvolupament de la relativitat i pal·liar, així, l'absència de referències del seu treball original. Adoptant deliberadament el registre històric, Einstein va proposar una lectura específica del seu treball en relació amb el d'altres físics, en particular amb el de Lorentz. La relativitat hauria sorgit, segons el seu creador, del conflicte entre l'electrodinàmica formulada per Lorentz i els resultats de l'experiment de Michelson-Morley (citat explícitament per primera vegada en les publicacions d'Einstein). Einstein caracteritzava sorprenentment el seu treball com una «unificació de la teoria de Lorentz i el principi de relativitat». És probable que el prestigi del físic holandès i els èxits de la seva teoria de l'electró motivessin el jove aspirant a físic teòric a subratllar les afinitats, abans que les diferències, entre el seu treball i la teoria de Lorentz. D'altra banda, Einstein atribuïa a l'experiment de Michelson-Morley la seva confiança en la validesa general del principi de relativitat, cosa que ha dut R. Staley a argumentar que la idea que el resultat nul de l'experiment va tenir una importància cabdal en la gènesi de la relativitat s'origina, probablement, en aquest article.⁴⁴

L'article és molt important també per una altra raó; i és que Einstein hi presentava «la idea més feliç» de la seva vida: la connexió entre relativitat i gravitació.⁴⁵ La secció v, «Principi de relativitat i gravitació», conté efectivament l'embrió del *principi d'equivalència*, com Einstein l'anomenarà més endavant, que estableix l'equivalència física entre un camp gravitatori i un sistema de referència uniformement accelerat. La relativitat especial tractava, com hem vist, de sistemes en moviment de translació uniforme; aquesta limitació no havia deixat d'importunar Einstein. La clau per estendre el principi de relativitat a sistemes de referència accelerats la hi va proporcionar la constatació que «tots els cossos tenen

⁴⁴STALEY (1998), 277. Aquest article fa una anàlisi excel·lent del paper d'«històries de participants» com aquestes en el desenvolupament de la relativitat.

⁴⁵L'expressió correspon a un manuscrit no publicat de l'any 1919, citat a PAIS (1984), 185.

la mateixa acceleració en un camp gravitatori». En altres paraules, la massa inercial d'un cos —la que en determina l'acceleració quan hi apliquem una força— i la massa gravitatòria —la que en determina el comportament en un camp gravitatori— són iguals. La interpretació d'aquesta igualtat, exposada en l'epígraf 20 de *La teoria de la relativitat* mitjançant una experiència imaginària tan antològica com la descrita per Galileu (la majoria de presentacions populars o didàctiques de la relativitat general la reprenen), va ser el primer pas vers la formulació de la relativitat general.

Un cop publicat aquest article, Einstein va concentrar els esforços en el problema dels quàntums, i no va reprendre el seu treball sobre relativitat i gravitació fins al 1911, l'any del seu nomenament com a professor de la Universitat Alemanya de Praga. La seva carrera acadèmica s'estava consolidant ràpidament en un procés que va culminar, pocs mesos abans que esclatés la Primera Guerra Mundial, amb la seva elecció com a membre de la Preussische Akademie der Wissenschaften i el seu nomenament com a catedràtic de la Universität Berlin i director de l'Institut de Física projectat per la Kaiser-Wilhelm Gesellschaft. L'arribada a Berlín suposava el reconeixement d'una trajectòria poc ortodoxa però brillant, que el 1910 ja li havia valgut una nominació per al Premi Nobel de Física. El canvi en la situació professional d'Einstein va fer que els seus contactes amb altres físics fossin més intensos i fluids; això fa que, a diferència de la relativitat especial, la gènesi de la relativitat general sigui un procés ben documentat, tant per les publicacions prèvies a la síntesi de 1915 com pels nombrosos manuscrits i cartes corresponents a aquest període. El desenvolupament de totes dues teories de la relativitat presenta una altra diferència important: mentre que els problemes que van motivar la teoria especial estaven ben identificats per la física del seu moment i captaven l'atenció de nombrosos físics, l'extensió de la relativitat a sistemes accelerats i la inclusió de la gravitació eren qüestions marginals, especialment en relació amb el desenvolupament de la teoria quàntica i la consolidació de la relativitat especial.

Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment

Traducció de Xavier Roqué.

*Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment**

Sabem que l'electrodinàmica de Maxwell —tal com la solem entendre actualment— aplicada a cossos en moviment, condueix a asimetries que no semblen inherents als fenòmens. Pensem, per exemple, en la interacció electrodinàmica entre un imant i un conductor. El fenomen observable només depèn, en aquest cas, del moviment relatiu del conductor i l'imat, mentre que la concepció habitual distingeix molt clarament dos casos, segons quin d'aquests dos cossos es mou. Si l'imat es mou i el conductor està en repòs, es crea al voltant de l'imat un camp elèctric d'una determinada energia, que genera un corrent en els llocs on es troben parts del conductor. Però si l'imat està en repòs i el conductor es mou, no es crea al voltant de l'imat cap camp elèctric, sinó una força electromotriu en el conductor, a la qual no correspon pròpiament cap energia, però que —suposant que el moviment relatiu sigui idèntic en tots dos casos— genera corrents elèctrics de la mateixa intensitat i evolució temporal que els que produeixen les forces elèctriques en el primer cas.

Exemples d'aquesta mena, així com els intents fallits de constatar cap moviment de la Terra respecte del «medi lumínic», fan conjecturar que cap propietat dels fenòmens no correspon al concepte de repòs absolut, no només en la mecànica sinó també en l'electrodinàmica; més aviat, en tots els sistemes de coordenades en què són vàlides les equacions mecàniques, són vàlides també les mateixes equacions electrodinàmiques i òptiques, com ja s'ha demostrat per a magnituds de primer ordre. Volem elevar aquesta conjectura (el contingut de la qual anomenarem «principi de relativitat») a la categoria de postulat i introduir, a més, el postulat —només en aparença incompatible amb l'anterior— segons el qual

*Hem afegit a les notes originals de l'article les notes addicionals incloses en el recull d'articles sobre el principi de relativitat editat pel matemàtic Otto Blumenthal el 1913 (BLUMENTHAL, 1913). Sembla que aquestes anotacions, atribuïdes a Arnold Sommerfeld, van ser autoritzades pel mateix Einstein (MCCAUSLAND, 1984).

la llum es propaga en l'espai buit amb velocitat constant V , independent de l'estat de moviment del cos emissor. Aquests dos postulats basten per formular una electrodinàmica dels cossos en moviment simple i coherent, basada en la teoria de Maxwell per a cossos en repòs. La introducció d'un «èter lumínic» es revelarà supèrflua, en la mesura que la concepció que desenvoluparem no requereix cap «espai en repòs absolut» dotat de propietats especials, com tampoc no atribueix un vector velocitat als punts de l'espai buit on tenen lloc processos electromagnètics.

La teoria que desenvoluparem es basa, com tota electrodinàmica, en la cinemàtica del cos rígid, ja que els enunciats de qualsevol teoria d'aquesta mena fan referència a relacions entre cossos rígids (sistemes de coordenades), rellotges i processos electromagnètics. De la consideració insuficient d'aquesta circumstància provenen les dificultats que assetgen l'electrodinàmica dels cossos en moviment.

I. Part cinemàtica

§1. Definició de la simultaneïtat

Considerem un sistema de coordenades en què són vàlides les equacions de la mecànica newtoniana.¹ A fi de distingir-lo verbalment dels que introduïrem més endavant i de precisar-ne la presentació, l'anomenem «sistema en repòs».

Si un punt material es troba en repòs respecte d'aquest sistema de coordenades, en podem determinar la posició respecte del darrer mitjançant regles rígids usant els mètodes de la geometria euclidiana, i podem expressar-la en coordenades cartesianes.

Si volem descriure el *moviment* d'un punt material, donem els valors de les seves coordenades en funció del temps. Fixem-nos, però, que aquesta descripció matemàtica només té un sentit físic si abans s'ha aclarit què s'ha d'entendre per «temps». Hem de tenir en compte que tot judici en què intervé el temps és sempre

¹El que es vol dir és que «són vàlides en primera aproximació» [Nota afegida a BLUMENTHAL (1913)].

un judici sobre *esdeveniments simultanis*. Si dic, per exemple, «el tren arriba aquí a les 7 hores», el que vull dir si fa no fa és que «el pas de la maneta petita del meu rellotge pel 7 i l'arribada del tren són esdeveniments simultanis».²

Pot semblar que totes les dificultats relatives a la definició de «temps» es podrien superar substituint aquest terme per «posició de la maneta petita del meu rellotge». De fet, aquesta definició és suficient si es tracta exclusivament de definir un temps per al lloc on es troba el rellotge, però deixa de ser-ho tan aviat com es tracta de relacionar temporalment esdeveniments que es produeixen a llocs diferents o —el que és gairebé el mateix— d'assignar valors temporals a esdeveniments que es produeixen a llocs allunyats del rellotge.

Podríem, certament, acostumar-nos de determinar el temps dels esdeveniments mitjançant un observador que se situés a l'origen de coordenades amb el rellotge. Aquest observador associaria a cada senyal lluminós, que, havent creuat l'espai buit, testimonia l'esdeveniment que volem avaluar, la posició corresponent de les agulles del rellotge. Aquesta coordinació té l'inconvenient, però, que no és independent de la posició de l'observador proveït d'un rellotge, com sabem per experiència. Amb les consideracions següents arribem a una determinació molt més pràctica.

Si al punt *A* de l'espai hi ha un rellotge, un observador situat en *A* pot avaluar el temps dels esdeveniments en l'entorn immediat de *A* consultant la posició de les manetes del rellotge simultània amb aquests esdeveniments. Si al punt *B* de l'espai hi ha també un rellotge —afegim-hi «un rellotge d'identica construcció al que es troba a *A*»—, un observador situat a *B* pot igualment avaluar el temps dels esdeveniments en l'entorn immediat de *B*. Tanmateix, a falta de més estipulacions, no és possible comparar els valors temporals d'un esdeveniment que té lloc a *A* i d'un altre que té

²No tractarem aquí de la imprecisió inherent al concepte de simultaneïtat de dos esdeveniments que es produeixen (gairebé) al mateix lloc, imprecisió que igualment s'ha deixat de banda mitjançant una abstracció.

lloc a B ; de moment només hem definit un «temps- A » i un «temps- B », però cap «temps» comú a A i B . Podem definir aquest darrer estipulant *per definició* que el «temps» que necessita la llum per anar de A a B és igual al «temps» que necessita per anar de B a A . Sigui un raig de llum que surt de A cap a B en l'instant t_A del «temps- A », es reflecteix en B en l'instant t_B del «temps- B », i torna a A en l'instant t'_A del «temps- A ». D'acord amb aquesta definició, els dos rellotges marxen sincrònicament si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Suposem que aquesta definició de sincronisme sigui coherent i aplicable a tants punts com vulguem, de manera que valguin en general les relacions següents:

1) Si el rellotge de B marxa sincrònicament amb el de A , aleshores el rellotge de A marxa sincrònicament amb el de B .

2) Si el rellotge de A marxa sincrònicament tant amb el de B com amb el de C , aleshores els rellotges de B i C marxen també sincrònicament l'un respecte de l'altre.

D'aquesta manera hem establert, amb l'ajut de certes experiències físiques (pensades), què s'ha d'entendre per marxa sincrònica de rellotges que es troben en repòs en llocs diferents, i hem obtingut evidentment una definició de «simultani» i de «temps». El «temps» d'un esdeveniment és la indicació, simultània amb aquest esdeveniment, d'un rellotge que es troba en repòs al lloc de l'esdeveniment i que marxa sincrònicament, per a totes les determinacions de temps, amb un rellotge en repòs determinat.

Estipulem a més, d'acord amb l'experiència, que la quantitat

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

és una constant universal (la velocitat de la llum en l'espai buit).

És essencial que hàgim definit el temps mitjançant rellotges en repòs dins el sistema en repòs; posat que el temps que acabem de definir pertany al sistema en repòs, l'anomenem «temps del sistema en repòs».

§2. Sobre la relativitat de longituds i temps

Les consideracions següents es basen en el principi de relativitat i en el principi de constància de la velocitat de la llum, principis que definim de la manera següent:

1) Les lleis que regulen els canvis de l'estat dels sistemes físics són independents del fet que referim aquests canvis a l'un o l'altre de dos sistemes de coordenades que es troben en moviment relatiu de translació uniforme.

2) Tot raig de llum es desplaça en el sistema de coordenades «en repòs» amb una velocitat determinada V , independentment que hagi estat emès per un cos en repòs o en moviment. Tenim, doncs,

$$\text{velocitat} = \frac{\text{trajecte de la llum}}{\text{interval de temps}},$$

on s'ha d'entendre «interval de temps» en el sentit de la definició de l'apartat 1.

Considerem una barra rígida en repòs que, mesurada amb un regle també en repòs, té una longitud l . Imaginem que l'eix de la barra està alineat amb l'eix X del sistema de coordenades en repòs i que s'imprimeix a la barra un moviment de translació uniforme (de velocitat v) al llarg de l'eix X i en el sentit creixent de x . Preguntem la longitud de la barra *en moviment*, que creiem que podem determinar mitjançant les dues operacions següents:

a) l'observador, proveït del regle esmentat, es mou amb la barra que ha de mesurar i en mesura directament la longitud amb el regle, com si ell mateix, la barra i el regle estiguessin en repòs,

b) l'observador, mitjançant rellotges en repòs sincrònics en el sentit de l'apartat 1, instal·lats en el sistema en repòs, determina en quins punts del sistema en repòs es troben els dos extrems de la barra que ha de mesurar en un instant donat t . La distància entre aquests punts, mesurada amb el mateix regle (que ara està en repòs), és també una longitud, que podem designar «longitud de la barra».

Segons el principi de relativitat, la longitud que hem de trobar mitjançant l'operació a), que anomenarem «longitud de la barra en el sistema en moviment», ha de ser igual a la longitud l de la barra en repòs. La longitud que hem de trobar mitjançant l'operació b), que anomenarem «longitud de la barra (en moviment) en el sistema en repòs», la determinarem a partir dels nostres dos principis i trobarem que és diferent de l .

La cinemàtica habitual assumeix de manera tàcita que les longituds determinades mitjançant aquestes dues operacions són del tot idèntiques o, dit d'una altra manera, que un cos rígid en moviment en l'instant t pot ser perfectament substituït, pel que fa a la geometria, pel mateix cos quan està en repòs en un lloc determinat.

Imaginem a més que, als extrems (A i B) de la barra, s'hi instal·len rellotges sincrònics amb els del sistema en repòs, les indicacions dels quals corresponen al «temps del sistema en repòs» del lloc en què es troben els rellotges en cada moment. Aquests rellotges són, doncs, «sincrònics en el sistema en repòs».

Imaginem també, que amb cada rellotge, s'hi desplaça un observador i que aquests observadors apliquen a tots dos rellotges el criteri de sincronisme establert en l'apartat 1. En el temps³ t_A surt de A un raig de llum, que es reflecteix en B en el temps t_B i torna a A en el temps t'_A . Considerant el principi de constància de la velocitat de la llum, trobem

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

i

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

on r_{AB} representa la longitud de la barra en moviment, mesurada en el sistema en repòs. Els observadors que es mouen amb la barra trobarien, doncs, que els dos rellotges no marxen sincrònicament,

³ «Temps» significa aquí «temps del sistema en repòs» i també «posició de les agulles del rellotge en moviment que es troba al lloc de què es tracta».

mentre que els observadors que es troben en el sistema en repòs declararien que els rellotges estan sincronitzats.

Veiem, doncs, que no podem atribuir cap significat *absolut* al concepte de simultaneïtat, sinó que dos esdeveniments considerats simultanis des d'un sistema de coordenades no els podem considerar simultanis quan els observem des d'un sistema que es mou respecte de l'anterior.

§3. Teoria de la transformació de coordenades i de temps del sistema en repòs en un altre en moviment relatiu de translació uniforme

Considerem en l'espai «en repòs» dos sistemes de coordenades, és a dir, dos sistemes de tres línies materials rígides perpendiculars entre elles que surten d'un punt. Suposem que els eixos X d'ambdós sistemes coincideixen i que els seus eixos Y i Z són, respectivament, paral·lels. Proveïm cada sistema d'un regle rígid i un nombre de rellotges determinat; tant els regles com els rellotges d'ambdós sistemes són exactament iguals entre ells.

Imprimim ara a l'origen d'un dels dos sistemes (k) una velocitat (constant) v en el sentit creixent de les x de l'altre sistema (K), en repòs, velocitat que adquireixen també els eixos de coordenades, el regle afectat i els rellotges. A cada temps t del sistema en repòs K hi correspon en aquest cas una posició determinada dels eixos del sistema en moviment, i podem suposar, per raons de simetria, que k es mou de manera que en el temps t (« t » designa un temps del sistema en repòs) els eixos del sistema en moviment són paral·lels als del sistema en repòs.

Imaginem que es mesura l'espai, tant des del sistema en repòs K mitjançant el regle en repòs, com des del sistema en moviment k mitjançant el regle corresponent, i que es determinen respectivament les coordenades x, y, z i ξ, η, ζ . Es determina també, mitjançant els rellotges en repòs que hi ha en el sistema en repòs i senyals lluminosos, com hem indicat en l'apartat 1, el temps t del sistema en repòs per a tots els punts d'aquest sistema on hi ha rellotges;

es determina igualment el temps τ del sistema en moviment per a tots els punts d'aquest sistema on hi ha rellotges en repòs respecte d'aquest darrer sistema, aplicant el mètode de senyals lluminosos descrit en l'apartat 1 entre els punts on es troben els rellotges.

A cada conjunt de valors x, y, z, t que determina completament la posició i el temps d'un esdeveniment en el sistema en repòs, hi correspon un conjunt de valors ξ, η, ζ, τ que fixa aquest esdeveniment respecte del sistema k ; ara el problema és trobar el sistema d'equacions que relaciona aquestes quantitats.

D'entrada, és clar que aquestes equacions han de ser *lineals* per les propietats d'homogeneïtat que atribuïm al temps i a l'espai.

Si fem $x' = x - vt$, és clar que, a un punt en repòs en el sistema k , hi correspon un determinat conjunt de valors x', y, z independent del temps. Determinem primer τ en funció de x', y, z i t . Per això hem d'expressar amb equacions que τ no és altra cosa que el conjunt de les indicacions dels rellotges en repòs en el sistema k , que han estat sincronitzats segons la regla donada en l'apartat 1.

Suposem que en l'instant τ_0 s'emet un raig de llum des de l'origen del sistema k segons l'eix X cap a x' , des d'on és reflectit en l'instant τ_1 cap a l'origen de coordenades, on arriba en l'instant τ_2 . Aleshores hem de tenir

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

o bé, introduint els arguments de la funció τ i aplicant en el sistema en repòs el principi de constància de la velocitat de la llum:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau \left(0, 0, 0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] \\ = \tau \left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v} \right). \end{aligned}$$

D'on se segueix, prenent x' infinitament petita

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

o bé

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Hem d'observar que en lloc de l'origen de coordenades podem haver triat qualsevol altre punt com a origen del raig de llum, de manera que aquesta equació és vàlida per a tots els valors de x' , y i z .

Un raonament anàleg —aplicat als eixos H i Z — dona, tenint en compte que des del sistema en repòs s'observa que la llum es propaga al llarg d'aquests eixos amb velocitat constant $\sqrt{V^2 - v^2}$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Com que τ és una funció *lineal*, d'aquestes equacions se segueix:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

on a és una funció $\varphi(v)$ de moment desconeguda i hem assumit, per simplificar, que en l'origen de k és $t = 0$ quan $\tau = 0$.

Mitjançant aquest resultat és fàcil determinar les quantitats ξ, η, ζ ; només cal expressar amb equacions que la llum (com demana el principi de constància de la velocitat de la llum en conjunció amb el principi de relativitat) es propaga també amb velocitat V quan la mesurem des del sistema en moviment. Per a un raig de llum emès en el temps $\tau = 0$ en el sentit creixent de ξ , tenim:*

$$\xi = V\tau,$$

*Les lletres Ξ, H i Z , majúscules de ξ, η i ζ , denoten els eixos del sistema k .

o bé

$$\xi = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

Ara bé, el raig de llum es mou respecte de l'origen de k amb velocitat $V - v$ mesurada des del sistema en repòs, de manera que:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Si introduïm aquest valor de t en l'equació de ξ , obtenim:

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

De manera anàloga, considerant els raigs de llum que es desplacen al llarg dels altres dos eixos, trobem:

$$\eta = V\tau = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

on

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

per tant

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

i

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Si introduïm el valor de x' obtenim:

$$\tau = \varphi(v) \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \varphi(v) \beta (x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v) y,$$

$$\zeta = \varphi(v) z,$$

on

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

i φ és una funció ara per ara desconeguda de v . Si no fem cap hipòtesi sobre la posició inicial del sistema en moviment i el punt zero de τ , hem d'afegir una constant additiva al membre dret d'aquestes equacions.

Hem de demostrar ara que tot raig de llum, mesurat en el sistema en moviment, es propaga amb velocitat V sempre que, com hem assumit, això passi en el sistema en repòs, ja que encara no hem demostrat que el principi de constància de la velocitat de la llum és compatible amb el principi de relativitat.

Suposem que en l'instant $t = \tau = 0$, en què l'origen de coordenades dels dos sistemes coincideix, s'emet des d'aquest origen comú una ona esfèrica que es propaga en el sistema K amb velocitat V . Si (x, y, z) és un punt que acaba de ser assolit per aquesta ona, tenim:

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Aplicant a aquesta equació les nostres equacions de transformació, obtenim, amb un càlcul senzill:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Per tant, l'ona considerada és també una ona esfèrica que es propaga amb velocitat V , si la considerem des del sistema en moviment. Això mostra que els nostres dos principis fonamentals són compatibles.⁴

Volem ara determinar la funció φ de v desconeguda que apareix en les equacions de transformació derivades més amunt.

⁴Les equacions de transformació de Lorentz es poden derivar més fàcilment de la condició que, segons aquestes equacions, la relació $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2 \tau^2 = 0$ ha de comportar $x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0$ [nota afegida a BLUMENTHAL (1913)].

Amb aquest fi introduïm un tercer sistema de coordenades K' , que presenti respecte del sistema k un moviment de translació paral·lel a l'eix Ξ , de manera que el seu origen de coordenades es mogui amb velocitat $-v$ segons l'eix X . Suposem que en l'instant $t = 0$ coincideixen tots tres orígens de coordenades i que el temps t' del sistema K' és igual a zero per a $t = x = y = z = 0$. Anomenem x', y', z' les coordenades del sistema K' . Aplicant dues vegades les nostres equacions de transformació, obtenim:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v) \left\{ \tau + \frac{v}{V^2}\xi \right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v) \{ \xi + v\tau \} = \varphi(v)\varphi(-v)x, \\ y' &= \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Com que les relacions entre x', y', z' i x, y, z no inclouen el temps t , els sistemes K i K' estan en repòs l'un respecte de l'altre i és clar que la transformació de K a K' ha de ser la transformació identitat. Tenim, doncs:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Què significa $\varphi(v)$? Fixem-nos en el fragment de l'eix H del sistema k comprès entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ i $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Aquest fragment és una barra que es mou perpendicularment al seu eix amb velocitat v respecte del sistema K , els extrems de la qual tenen en K les coordenades

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

i

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

La longitud de la barra —mesurada en K — és, doncs, $l/\varphi(v)$, expressió que indica el significat de la funció φ . És evident, per raons de simetria, que la longitud —mesurada en el sistema en repòs—

d'una barra que es mou perpendicularment al seu eix, només pot dependre de la velocitat, però no de la direcció ni del sentit del moviment. És per això que la longitud de la barra en moviment mesurada en el sistema en repòs no canvia quan substituïm v per $-v$. Se'n segueix:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aquesta relació i la que ja havíem obtingut impliquen necessàriament $\varphi(v) = 1$, de manera que les equacions de transformació esdevenen

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

on

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§4. Significació física de les equacions obtingudes, pel que fa a cossos rígids i rellotges en moviment

Considerem una esfera⁵ rígida de radi R , en repòs respecte del sistema en moviment k , el centre de la qual es troba a l'origen de coordenades de k . L'equació de la superfície d'aquesta esfera, que es mou amb velocitat v respecte del sistema K , és

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

⁵És a dir, un cos que examinat en repòs presenta forma esfèrica.

L'equació d'aquesta superfície expressada en x, y, z per a $t = 0$, és

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un cos rígid que, mesurat en repòs, té forma d'esfera, presenta en estat de moviment —considerat des del sistema en repòs— la forma d'un el·lipsoide de revolució amb eixos

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad R, \quad R.$$

Així, mentre que les dimensions Y i Z de l'esfera (i, per tant, les de tot cos rígid) no presenten cap modificació a causa del moviment, la dimensió X sembla escurçada en la proporció $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$, és a dir, molt més com més gran és v . Per a $v = V$ tots els objectes en moviment —considerats des del sistema «en repòs»— es contreuen en figures planes. Per a velocitats supralumíniques el nostre raonament no té cap sentit; a més, tal com mostraran les consideracions següents, la velocitat de la llum té físicament en la nostra teoria el paper d'una velocitat infinita.

És clar que els mateixos resultats valen per a cossos en repòs en el sistema «en repòs», quan els considerem des d'un sistema en moviment uniforme.

Considerem ara un dels rellotges que indiquen el temps t quan estan en repòs respecte del sistema en repòs, i el temps τ quan estan en repòs respecte del sistema en moviment. Imaginem-lo situat a l'origen de coordenades de k i disposat de manera que indica el temps τ . A quin ritme marxa aquest rellotge, vist des del sistema en repòs?

Les magnituds x, t i τ , que es refereixen a la posició d'aquest

rellotge, verifiquen òbviament les equacions

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right)$$

i

$$x = vt.$$

Tenim, doncs,

$$\tau = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \right) t,$$

equació que implica que el rellotge (vist des del sistema en repòs) es retarda, cada segon, $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ segons, és a dir, $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segons, si negligim quantitats de quart ordre o d'ordre superior.

Això té una conseqüència peculiar. Si en els punts *A* i *B* de *K* hi ha dos rellotges en repòs, sincrònics pel que fa al sistema en repòs, i imprimim al rellotge de *A* una velocitat *v* segons la línia que l'uneix a *B*, aleshores quan aquest rellotge arriba a *B* els dos rellotges ja no són sincrònics, sinó que el que s'ha desplaçat de *A* a *B* retarda, respecte del que ha restat a *B*, $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segons (fins a quantitats de quart ordre o d'ordre superior), on *t* és el temps que ha esmerçat el rellotge per anar de *A* a *B*.

Ja es veu que aquest resultat val també si el rellotge segueix una línia poligonal qualsevol per anar de *A* a *B*, i fins i tot si els punts *A* i *B* coincideixen.

Assumint que el resultat demostrat per a una línia poligonal valgui també per a una corba de curvatura contínua, obtenim la proposició següent: si a *A* hi ha dos rellotges sincrònics, i l'un esmerça *t* segons per descriure amb velocitat constant una corba tancada entorn de *A*, aleshores en arribar a *A* aquest rellotge retarda $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segons respecte del que hi ha restat immòbil. Se'n

segueix que un rellotge de corda⁶ situat a l'equador s'endarrereix lleugerament respecte d'un rellotge del tot idèntic situat a un dels pols i sotmès altrament a les mateixes condicions.

§5. Teorema d'addició de les velocitats

Suposem que en el sistema k , que es mou amb velocitat v al llarg de l'eix X del sistema K , hi ha un punt que es mou segons les equacions

$$\xi = \omega_{\xi} \tau,$$

$$\eta = \omega_{\eta} \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

on ω_{ξ} i ω_{η} denoten constants.

Com es mou el punt respecte del sistema K ? Introduint les quantitats x, y, z, t a les equacions de moviment del punt, mitjançant les equacions de transformació desenvolupades en l'apartat 3, obtenim:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega_{\xi} + v}{1 + \frac{v\omega_{\xi}}{V^2}} t, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\omega_{\xi}}{V^2}} \omega_{\eta} t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

En la nostra teoria, doncs, l'addició vectorial de velocitats només val en primera aproximació. Posem

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

⁶A diferència del *rellotge de pèndol*, el qual, des del punt de vista físic, és un sistema que inclou la Terra, circumstància que s'ha d'excloure [nota afegida a BLUMENTHAL (1913)].

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2$$

i*

$$\alpha = \arctan \frac{\omega_\eta}{\omega_\xi};$$

α s'ha de considerar aleshores l'angle entre les velocitats v i ω . Mitjançant un càlcul senzill obtenim:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + \omega^2 + 2v\omega \cos \alpha) - \left(\frac{v\omega \sin \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\omega \cos \alpha}{V^2}}.$$

Notem que v i ω intervenen de manera simètrica en l'expressió de la velocitat resultant. Si ω du també la direcció de l'eix X (eix Ξ), obtenim:

$$U = \frac{v + \omega}{1 + \frac{v\omega}{V^2}}.$$

Aquesta equació implica que la composició de dues velocitats menors que V dóna sempre com a resultat una velocitat menor que V . Així, si prenem $v = V - \kappa$, $\omega = V - \lambda$, on κ i λ són positius i menors que V , tenim:

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Una altra implicació és que no podem modificar la velocitat de la llum V per composició amb una «velocitat menor que la de la llum». En aquest cas obtenim:

$$U = \frac{V + \omega}{1 + \frac{\omega}{V}} = V.$$

*Hem corregit l'error d'impremta ω_y/ω_x per ω_η/ω_ξ .

Podríem haver obtingut la fórmula de U en el cas que v i ω tinguessin la mateixa direcció, fent la composició de dues de les transformacions de l'apartat 3. Si, a més dels sistemes K i k de l'apartat 3, introduïm un tercer sistema de coordenades k' que es mou paral·lelament a k i l'origen del qual es mou al llarg de l'eix Ξ amb velocitat ω , obtenim unes equacions entre les magnituds x, y, z, t i les magnituds corresponents en k' que només es distingeixen de les que hem trobat en l'apartat 3 perquè, en lloc de « v », hi apareix la magnitud

$$\frac{v + \omega}{1 + \frac{v\omega}{V^2}};$$

d'aquesta manera es veu que aquestes transformacions paral·leles formen un grup, com ha de ser.

Després d'haver deduït les proposicions necessàries de la cinemàtica corresponent als nostres dos principis, passem a mostrar-ne l'aplicació a l'electrodinàmica.

II. Part electrodinàmica

§6. Transformació de les equacions de Maxwell-Hertz per a l'espai buit. Sobre la naturalesa de les forces electromotrius generades pel moviment en un camp magnètic

Suposem que les equacions de Maxwell-Hertz per a l'espai buit siguin vàlides per al sistema en repòs K , de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

on (X, Y, Z) representa el vector de la força elèctrica i (L, M, N) , el de la força magnètica.

Si apliquem a aquestes equacions la transformació desenvolupada en l'apartat 3, a fi de referir els processos electromagnètics al sistema de coordenades que es mou amb velocitat v que hi hem introduït, obtenim les equacions

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left\{ \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right) \right\}}{\partial \eta} - \frac{\partial \left\{ \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right) \right\}}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \left\{ \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) \right\}}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \left\{ \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right) \right\}}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \left\{ \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) \right\}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left\{ \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right) \right\}}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left\{ \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) \right\}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \left\{ \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) \right\}}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \left\{ \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right) \right\}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left\{ \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) \right\}}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \left\{ \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right) \right\}}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \left\{ \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) \right\}}{\partial \xi},\end{aligned}$$

on*

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Ara, el principi de relativitat exigeix que, si les equacions de Maxwell-Hertz per al buit valen en el sistema K , valguin també en el sistema k ; és a dir, que els vectors de les forces elèctrica i

*Hem introduït les claus $\{ \}$ en el numerador que no estan en l'original per evitar confusions en el significat de les derivades.

magnètica $-(X', Y', Z')$ i (L', M', N') — del sistema en moviment k , definits respectivament per les seves accions ponderomotrius sobre càrregues elèctriques i magnètiques, satisfacin les equacions

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

És evident que els dos sistemes d'equacions obtinguts per al sistema k han d'expressar exactament el mateix, ja que ambdós són equivalents a les equacions de Maxwell-Hertz per al sistema K . Encara més, com que les equacions d'ambdós sistemes coincideixen llevat dels símbols que representen els vectors, les funcions que apareixen en llocs corresponents en aquests sistemes han de coincidir llevat d'un factor $\psi(v)$, comú a totes les funcions d'un dels sistemes d'equacions, independent de ξ, η, ζ i τ però que pot dependre de v . Tenim, doncs, les relacions:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta \left(Y - \frac{v}{V}N \right), & M' &= \psi(v)\beta \left(M + \frac{v}{V}Z \right), \\ Z' &= \psi(v)\beta \left(Z + \frac{v}{V}M \right), & N' &= \psi(v)\beta \left(N - \frac{v}{V}Y \right). \end{aligned}$$

Invertim ara aquest sistema d'equacions, en primer lloc resolent les equacions que acabem d'obtenir, en segon lloc aplicant a les equacions la transformació inversa (de k a K), caracteritzada per la velocitat $-v$. Tenint en compte que els dos sistemes d'equacions obtinguts així han de ser idèntics, obtenim*

$$\psi(v) \cdot \psi(-v) = 1.$$

*Hem corregit un error d'impressió de l'original en què en lloc de ψ , hi apareix φ .

D'altra banda, per raons de simetria⁷

$$\psi(v) = \psi(-v);$$

per tant,

$$\psi(v) = 1,$$

i les nostres equacions prenen la forma

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), & M' &= \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right), & N' &= \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Pel que fa a la interpretació d'aquestes equacions, notem el següent. Considerem una càrrega elèctrica puntual de magnitud «u» mesurada en el sistema en repòs K , és a dir, que en repòs en el sistema en repòs exerceix una força d'1 dyn sobre una càrrega idèntica a una distància d'1 cm. D'acord amb el principi de relativitat, aquesta càrrega té la mateixa magnitud «u» mesurada en el sistema en moviment. Si aquesta càrrega està en repòs respecte del sistema en repòs, el vector (X, Y, Z) és, per definició, igual a la força que actua sobre ella. Si la càrrega està en repòs respecte del sistema en moviment (si més no en el moment considerat), la força que actua sobre ella, mesurada en el sistema en moviment, és igual al vector (X', Y', Z') . Així podem expressar amb paraules la primera de les tres equacions anteriors de les dues maneres següents:

1) Quan una càrrega elèctrica puntual unitat es mou en un camp electromagnètic, a més de la força elèctrica hi actua una «força electromotriu» que, negligint els termes que contenen potències d'ordre dos o d'ordre superior de v/V , és igual al producte

⁷Si, per exemple, $X = Y = Z = L = M = 0$ i $N \neq 0$, és clar per raons de simetria que un canvi de signe de v que no afecti el seu valor numèric, ha de comportar un canvi de signe de Y' que tampoc no afecti el seu valor numèric.

vectorial de la velocitat de la càrrega unitat per la força magnètica, dividit per la velocitat de la llum (antiga forma d'expressió).

2) Quan una càrrega elèctrica puntual unitat es mou en un camp electromagnètic, la força que hi actua és igual a la força elèctrica en el lloc de la càrrega unitat, que s'obté transformant el camp a un sistema de coordenades en repòs respecte de la càrrega unitat (nova forma d'expressió).

Expressions anàlogues valen per a la «força magnetomotriu». Veiem que en la teoria que hem desenvolupat la força electromotriu només fa el paper d'un concepte auxiliar, que hem introduït perquè les forces elèctriques i magnètiques no tenen una existència independent de l'estat de moviment del sistema de coordenades.

És clar, a més, que desapareix la asimetria esmentada a la introducció, referent als corrents generats pel moviment relatiu d'un imant i un conductor. Tampoc no té cap raó de ser la qüestió de la «seu» de les forces electromotrius electrodinàmiques (màquines unipolars).

§7. Teoria de l'efecte Doppler i de l'aberració

Suposem que en el sistema K , ben lluny de l'origen de coordenades, hi ha una font d'ones electrodinàmiques que, en una part de l'espai que conté l'origen de coordenades, poden ser representades amb una aproximació suficient per les equacions

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega \left(t - \frac{ax + by + cz}{V} \right), \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi; \end{aligned}$$

en les quals (X_0, Y_0, Z_0) i (L_0, M_0, N_0) són els vectors que determinen l'amplitud del tren d'ones i (a, b, c) són els cosinus directors de la normal a les ones.

Quina estructura presenten aquestes ones per a un observador en repòs en el sistema en moviment k ? Aplicant les equacions de transformació de les forces elèctriques i magnètiques que hem

trobat en l'apartat 6 i les equacions de transformació de les coordenades i del temps que hem trobat en l'apartat 3, obtenim directament:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', & M' &= \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', & N' &= \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi', \\ \Phi' &= \omega' \left(\tau - \frac{a' \xi + b' \eta + c' \zeta}{V} \right), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right), \\ a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}}, \\ b' &= \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}, \\ c' &= \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}. \end{aligned}$$

De l'equació de ω' es dedueix que si un observador es mou amb velocitat v respecte d'una font de llum infinitament distant de freqüència ν , de manera que la línia «font de llum-observador» que els uneix forma un angle φ amb la velocitat de l'observador referida a un sistema de coordenades en repòs respecte de la font, aleshores la freqüència ν' de la llum percebuda per l'observador és

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Aquest és l'efecte Doppler per a velocitats qualssevol. Per a $\varphi = 0$ l'equació pren una forma simple:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Veiem que, a diferència de la concepció habitual, quan $v = -\infty$, $\nu = \infty$.*

Si anomenem φ' l'angle entre la normal a l'ona (direcció del raig) en el sistema en moviment i la línia que uneix «font de llum-observador» l'equació de a' pren la forma*

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Aquesta equació expressa la llei d'aberració en la forma més general. Per a $\varphi = \pi/2$ l'equació pren la forma simple:

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Encara hem de determinar l'amplitud de les ones, tal com apareix en el sistema en moviment. Si anomenem A i A' l'amplitud de la força elèctrica o magnètica en el sistema en repòs i en moviment, respectivament, obtenim:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

*Hi hauria de dir: «quan $v = -V$, $\nu' = \infty$ ».

*En una de les seves separates Einstein va substituir l'expressió «la línia que uneix l'observador i la font» per «la direcció de moviment».

que, per a $\varphi = 0$, esdevé simplement

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Aquestes equacions impliquen que, a un observador que s'apropa amb velocitat V a una font de llum, aquesta font li ha de semblar infinitament intensa.

§8. Transformació de l'energia dels raigs de llum. Teoria de la pressió de radiació exercida sobre un mirall perfecte

Com que $A^2/8\pi$ és igual a l'energia de la llum per unitat de volum, el principi de relativitat ens duu a considerar $A'^2/8\pi$ l'energia de la llum en el sistema en moviment. Aleshores A'/A^2 seria la relació entre l'energia «mesurada en moviment» i l'energia «mesurada en repòs» d'un complex de llum* determinat, si el volum d'un complex de llum fos el mateix mesurat en K que mesurat en k . Però aquest no és el cas, ja que, si a, b, c són els cosinus directors de la normal d'ona de la llum en el sistema en repòs, cap energia no travessa els elements de superfície de la superfície esfèrica

$$(x - V at)^2 + (y - V bt)^2 + (z - V ct)^2 = R^2,$$

que es mou a la velocitat de la llum; podríem dir que aquesta superfície encercla sempre el mateix complex de llum. Demanem la quantitat d'energia que encercla aquesta superfície vista des del sistema k , és a dir, l'energia del complex de llum relativa al sistema k .

La superfície esfèrica —vista des del sistema en moviment— és una superfície el·lipsoïdal que en l'instant $\tau = 0$ satisfà l'equació

$$(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi)^2 + (\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi)^2 + (\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi)^2 = R^2.$$

**Lichtkomplex*. Einstein vol indicar amb aquest terme que la llum no s'ha de considerar l'estat d'un medi (l'èter), sinó una entitat física autònoma.

Si anomenem S el volum de l'esfera i S' el de l'el·lipsoide, amb un càlcul senzill tenim:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Si anomenem E l'energia de la llum que conté la superfície que considerem mesurada en el sistema en repòs i E' la mesurada en el sistema en moviment, obtenim:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

fórmula que, per a $\varphi = 0$, se simplifica en

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Hem de destacar que l'energia i la freqüència d'un complex de llum varien amb l'estat de moviment de l'observador segons la mateixa llei.

Suposem ara que el pla de coordenades $\xi = 0$ sigui una superfície reflectora perfecta sobre la qual es reflecteixen les ones planes del paràgraf anterior. Demanem la pressió que la llum exerceix sobre la superfície reflectora, així com la direcció, freqüència i intensitat de la llum reflectida.

Definim la llum incident mitjançant les magnituds A , $\cos \varphi$, v , referides al sistema K . Les magnituds corresponents vistes des del sistema k són

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Per a la llum reflectida tenim, referint el procés al sistema k :

$$A'' = A',$$

$$\cos \varphi'' = -\cos \varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Fent la transformació inversa al sistema K , obtenim finalment per a la llum reflectida:*

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

*S'ha corregit un error trivial en el denominador del darrer terme de l'equació per a ν''' , que Einstein ja va notar en una de les seves separades.

És evident que l'energia incident per unitat de superfície del reflector i unitat de temps (mesurada en el sistema en repòs) és $A^2/8\pi(V \cos \varphi - v)$. L'energia reflectida per unitat de superfície del reflector i unitat de temps és $A'^2/8\pi(-V \cos \varphi' + v)$. Segons el principi [de conservació] de l'energia, la diferència entre aquestes expressions és el treball realitzat per la pressió de radiació en la unitat de temps. Igualant aquest treball al producte $P \cdot v$, on P és la pressió de radiació, obtenim:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

En primera aproximació, d'acord amb l'experiència i altres teories, obtenim

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Aquest mètode permet resoldre tots els problemes de l'òptica dels cossos en moviment. El que és essencial és transformar la força elèctrica i magnètica de la llum, que és afectada pel moviment d'un cos, en un sistema de coordenades en repòs respecte d'aquest cos. D'aquesta manera els problemes de l'òptica dels cossos en moviment es redueixen a una sèrie de problemes de l'òptica dels cossos en repòs.

§9. Transformació de les equacions de Maxwell-Hertz tenint en compte els corrents de convecció

Partim de les equacions

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \rho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \rho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

on

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

denota 4π vegades la densitat d'electricitat i (u_x, u_y, u_z) , el vector velocitat de l'electricitat. Si imaginem les càrregues elèctriques permanentment lligades a petits cossos rígids (ions, electrons), aquestes equacions són el fonament electromagnètic de l'electrodinàmica i l'òptica dels cossos en moviment de Lorentz.

Mitjançant les equacions de transformació dels apartats 3 i 6, podem transformar aquestes equacions, que es consideren vàlides en el sistema K , al sistema k , de manera que obtenim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \left\{ u_\xi \rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\eta \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\zeta \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} &= u_\xi, \\ \frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\eta, \\ \frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\zeta \end{aligned}$$

i

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{V^2} \right) \rho.$$

Com que el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) —segons el teorema d'addició de les velocitats de l'apartat 5— no és altra cosa que la velocitat de les

càrregues elèctriques mesurada en el sistema k , queda demostrat que, partint dels nostres principis cinemàtics, el fonament electrodinàmic de la teoria de Lorentz de l'electrodinàmica dels cossos en moviment és conforme al principi de relativitat.

Observem encara breument que d'aquestes equacions es pot derivar fàcilment la important proposició següent: si un cos carregat elèctricament es mou arbitràriament en l'espai de manera que la seva càrrega, vista des d'un sistema de coordenades que es mou amb aquest cos, no varia, aleshores la seva càrrega resta també constant vista des del sistema «en repòs» K .

§10. Dinàmica de l'electró (lentament accelerat)

Suposem que una partícula puntual de càrrega elèctrica ϵ (que anomenarem «electró») es mou en un camp electromagnètic, i limitem-nos a assumir el següent sobre la seva equació de moviment:

Si en un instant determinat l'electró està en repòs, les equacions que en regeixen el moviment en l'instant immediatament posterior són

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \epsilon X ,$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \epsilon Y ,$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \epsilon Z ,$$

on x, y, z denoten les coordenades de l'electró i μ la massa (sempre que es mogui lentament).

Suposem ara que l'electró es mou en un instant determinat amb velocitat v . Mirem d'establir l'equació de moviment de l'electró per a l'instant immediatament posterior.

Sense renunciar a la generalitat del raonament, podem i volem assumir que l'electró es troba a l'origen de coordenades en aquest instant, i que es mou amb velocitat v al llarg de l'eix X del sistema

K. És clar aleshores que l'electró es troba, en l'instant esmentat ($t = 0$), en repòs respecte d'un sistema de coordenades k que es mou paral·lelament a l'eix X amb velocitat constant v .

És clar, a partir d'aquesta hipòtesi i del principi de relativitat, que en l'instant immediatament posterior (per a valors petits de t) l'electró, considerat des del sistema k , es mou segons les equacions

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \epsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \epsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \epsilon Z',$$

on els símbols ξ , η , ζ , τ , X' , Y' , Z' es refereixen al sistema k . Si estipulem, a més, que per a $t = x = y = z = 0$, s'ha de tenir $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, valen les equacions de transformació de l'apartat 3 i l'apartat 6, de manera que tenim:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta(x - vt), \quad X' = X,$$

$$\eta = y, \quad Y' = \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right),$$

$$\zeta = z, \quad Z' = \beta \left(Z + \frac{v}{V} N \right).$$

Mitjançant aquestes equacions transformem les equacions de moviment anteriors del sistema k al sistema K i obtenim:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^3} X, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M \right). \end{cases}$$

Seguint el raonament habitual, demanem la massa «longitudinal» i «transversal» de l'electró en moviment. Escrivim les equacions (A) en la forma

$$\begin{aligned}\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} &= \epsilon X = \epsilon X', \\ \mu \beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= \epsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) = \epsilon Y', \\ \mu \beta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} &= \epsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) = \epsilon Z',\end{aligned}$$

i notem, primer, que $\epsilon X'$, $\epsilon Y'$, $\epsilon Z'$ són les components de la força ponderomotriu que actua sobre l'electró, considerat des d'un sistema que es mou en aquell instant amb la mateixa velocitat que l'electró. (Aquesta força es podria mesurar, per exemple, amb una balança en repòs en el darrer sistema.) Si aquesta força l'anomenem simplement «força que actua sobre l'electró» i mantenim la relació⁸

valor de la massa $\times$ valor de l'acceleració = valor de la força,

i si estipulem, a més, que les acceleracions s'han de mesurar en el sistema en repòs K , obtenim de les equacions anteriors:

$$\begin{aligned}\text{massa longitudinal} &= \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2} \right)^3}, \\ \text{massa transversal} &= \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}.\end{aligned}$$

⁸La definició de força que donem aquí no és avantatjosa, com M. Planck va observar abans que ningú. Convé més definir la força de manera que els principis [de conservació] del moment i l'energia adoptin la forma més senzilla [nota afegida a BLUMENTHAL (1913)].

Naturalment, una altra definició de força i d'acceleració conduiria a altres valors per a les masses; veiem, doncs, que s'ha d'anar amb molt de compte a l'hora de comparar diferents teories del moviment de l'electró.

Observem que aquests resultats per a la massa valen també per a punts materials ponderables, ja que, d'un punt material ponderable, en podem fer un electró (en el nostre sentit) donant-li una càrrega *arbitràriament petita*.

Determinem l'energia cinètica de l'electró. Si un electró, partint de l'origen de coordenades amb velocitat inicial 0, es mou al llarg de l'eix X sota l'acció d'una força electrostàtica X , és clar que l'energia que sostreu al camp elèctric és $\int \epsilon X dx$. Com que hem suposat que l'electró és lentament accelerat i que, per tant, no perd energia en forma de radiació, s'ha d'igualar l'energia sotreta al camp electrostàtic amb l'energia cinètica W de l'electró. D'aquesta manera obtenim, tenint en compte que la primera de les equacions (A) és aplicable a tot el procés de moviment considerat:*

$$W = \int \epsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Per a $v = V$, doncs, W esdevé infinitament gran. Velocitats superiors a la de la llum no tenen —com passa en els nostres resultats anteriors— cap possibilitat d'existir.

D'acord amb l'argument de més amunt, aquesta expressió per a l'energia cinètica ha de valer igualment per a masses ponderables.

Volem ara enumerar les propietats del moviment de l'electró que resulten del sistema d'equacions (A) i són experimentalment contrastables:

1) La segona equació del sistema (A) implica que una força elèctrica Y i una força magnètica N causen la mateixa deflexió en

*S'ha afegit un factor μ que mancava davant la segona integral.

un electró que es mou amb velocitat v , si $Y = Nv/V$. Segons la nostra teoria, doncs, es pot determinar la velocitat de l'electró a partir de la raó entre la deflexió magnètica A_m i la deflexió elèctrica A_e , per a qualsevol velocitat, aplicant la llei

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Aquesta relació la podem comprovar experimentalment, ja que és possible mesurar directament la velocitat de l'electró, per exemple mitjançant camps elèctrics i magnètics que oscil·len ràpidament.

2) La deducció de l'energia cinètica de l'electró implica que, entre la diferència de potencial travessada i la velocitat v adquirida per l'electró, hi ha d'haver la relació

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\epsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3) Calculem el radi de curvatura R de la trajectòria de l'electró quan l'única força deflectora que intervé és una força magnètica N perpendicular a la velocitat de l'electró. A partir de la segona de les equacions (A) obtenim

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

o bé

$$R = V^2 \frac{\mu}{\epsilon} \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \frac{1}{N}.$$

Aquestes tres relacions expressen completament les lleis que, segons la teoria que hem presentat, regeixen el moviment de l'electró.

Com a conclusió, voldria dir que, mentre treballava en els problemes que he tractat aquí, he tingut el suport constant del meu amic i col·lega M. Besso, a qui agraeixo nombrosos suggeriments importants.

«Zur Elektrodynamik bewegter Körper»

Annalen der Physik, **17**, 891–921 (1905).

Datat: Berna, juny de 1905.

Rebut: 30 de juny de 1905.

Publicat: 26 de setembre de 1905.

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum“ eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

§ 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System“.

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit“ verstanden wird.

Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an,“ so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse.“¹⁾

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit“ betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der „Zeit“ die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr“ setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte A des Raumes eine Uhr, so kann ein in A befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte B des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in A befindliche“ — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von

1) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.

B durch einen in B befindlichen Beobachter möglich. Es ist aber ohne weitere Festsetzung nicht möglich, ein Ereignis in A mit einem Ereignis in B zeitlich zu vergleichen; wir haben bisher nur eine „ A -Zeit“ und eine „ B -Zeit“, aber keine für A und B gemeinsame „Zeit“ definiert. Die letztere Zeit kann nun definiert werden, indem man *durch Definition* festsetzt, daß die „Zeit“, welche das Licht braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich ist der „Zeit“, welche es braucht, um von B nach A zu gelangen. Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „ A -Zeit“ t_A von A nach B ab, werde zur „ B -Zeit“ t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „ A -Zeit“ t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Wir nehmen an, daß diese Definition des Synchronismus in widerspruchsfreier Weise möglich sei, und zwar für beliebige viele Punkte, daß also allgemein die Beziehungen gelten:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B .

2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

Wir haben so unter Zuhilfenahme gewisser (gedachter) physikalischer Erfahrungen festgelegt, was unter synchron laufenden, an verschiedenen Orten befindlichen, ruhenden Uhren zu verstehen ist und damit offenbar eine Definition von „gleichzeitig“ und „Zeit“ gewonnen. Die „Zeit“ eines Ereignisses ist die mit dem Ereignis gleichzeitige Angabe einer am Orte des Ereignisses befindlichen, ruhenden Uhr, welche mit einer bestimmten, ruhenden Uhr, und zwar für alle Zeitbestimmungen mit der nämlichen Uhr, synchron läuft.

Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2 \overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume) sei.

Wesentlich ist, daß wir die Zeit mittels im ruhenden System

ruhender Uhren definiert haben; wir nennen die eben definierte Zeit wegen dieser Zugehörigkeit zum ruhenden System „die Zeit des ruhenden Systems“.

§ 2. Über die Relativität von Längen und Zeiten.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf das Relativitätsprinzip und auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welche beiden Prinzipien wir folgendermaßen definieren.

1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V , unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei „Zeitdauer“ im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.

Es sei ein ruhender starrer Stab gegeben; derselbe besitze, mit einem ebenfalls ruhenden Maßstabe gemessen, die Länge l . Wir denken uns nun die Stabachse in die X -Achse des ruhenden Koordinatensystems gelegt und dem Stabe hierauf eine gleichförmige Paralleltranslationsbewegung (Geschwindigkeit v) längs der X -Achse im Sinne der wachsenden x erteilt. Wir fragen nun nach der Länge des *bewegten* Stabes, welche wir uns durch folgende zwei Operationen ermittelt denken:

a) Der Beobachter bewegt sich samt dem vorher genannten Maßstabe mit dem auszumessenden Stabe und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

b) Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden Systeme aufgestellter, gemäß § 1 synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden.

Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als „Länge des Stabes“ bezeichnen kann.

Nach dem Relativitätsprinzip muß die bei der Operation a) zu findende Länge, welche wir „die Länge des Stabes im bewegten System“ nennen wollen, gleich der Länge l des ruhenden Stabes sein.

Die bei der Operation b) zu findende Länge, welche wir „die Länge des (bewegten) Stabes im ruhenden System“ nennen wollen, werden wir unter Zugrundelegung unserer beiden Prinzipien bestimmen und finden, daß sie von l verschieden ist.

Die allgemein gebrauchte Kinematik nimmt stillschweigend an, daß die durch die beiden erwähnten Operationen bestimmten Längen einander genau gleich seien, oder mit anderen Worten, daß ein bewegter starrer Körper in der Zeitepoche t in geometrischer Beziehung vollständig durch denselben Körper, wenn er in bestimmter Lage ruht, ersetzbar sei.

Wir denken uns ferner an den beiden Stabenden (A und B) Uhren angebracht, welche mit den Uhren des ruhenden Systems synchron sind, d. h. deren Angaben jeweilen der „Zeit des ruhenden Systems“ an den Orten, an welchen sie sich gerade befinden, entsprechen; diese Uhren sind also „synchron im ruhenden System“.

Wir denken uns ferner, daß sich bei jeder Uhr ein mit ihr bewegter Beobachter befinde, und daß diese Beobachter auf die beiden Uhren das im § 1 aufgestellte Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren anwenden. Zur Zeit¹⁾ t_A gehe ein Lichtstrahl von A aus, werde zur Zeit t_B in B reflektiert und gelange zur Zeit t'_A nach A zurück. Unter Berücksichtigung des Prinzipes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit finden wir:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

1) „Zeit“ bedeutet hier „Zeit des ruhenden Systems“ und zugleich „Zeigerstellung der bewegten Uhr, welche sich an dem Orte, von dem die Rede ist, befindet“.

und

$$t_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

wobei r_{AB} die Länge des bewegten Stabes — im ruhenden System gemessen — bedeutet. Mit dem bewegten Stabe bewegte Beobachter würden also die beiden Uhren nicht synchron gehend finden, während im ruhenden System befindliche Beobachter die Uhren als synchron laufend erklären würden.

Wir sehen also, daß wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine *absolute* Bedeutung beimessen dürfen, sondern daß zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind.

§ 3. Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation
von dem ruhenden auf ein relativ zu diesem in gleichförmiger
Translationsbewegung befindliches System.

Seien im „ruhenden“ Raume zwei Koordinatensysteme, d. h. zwei Systeme von je drei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten starren materiellen Linien, gegeben. Die X -Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre Y - und Z -Achsen bezüglich parallel sein. Jedem Systeme sei ein starrer Maßstab und eine Anzahl Uhren beigegeben, und es seien beide Maßstäbe sowie alle Uhren beider Systeme einander genau gleich.

Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (k) eine (konstante) Geschwindigkeit v in Richtung der wachsenden x des anderen, ruhenden Systems (K) erteilt, welche sich auch den Koordinatenachsen, dem betreffenden Maßstabe sowie den Uhren mitteilen möge. Jeder Zeit t des ruhenden Systems K entspricht dann eine bestimmte Lage der Achsen des bewegten Systems und wir sind aus Symmetriegründen befugt anzunehmen, daß die Bewegung von k so beschaffen sein kann, daß die Achsen des bewegten Systems zur Zeit t (es ist mit „ t “ immer eine Zeit des ruhenden Systems bezeichnet) den Achsen des ruhenden Systems parallel seien.

Wir denken uns nun den Raum sowohl vom ruhenden System K aus mittels des ruhenden Maßstabes als auch vom

bewegten System k mittels des mit ihm bewegten Maßstabes ausgemessen und so die Koordinaten x, y, z bez. ξ, η, ζ ermittelt. Es werde ferner mittels der im ruhenden System befindlichen ruhenden Uhren durch Lichtsignale in der in § 1 angegebenen Weise die Zeit t des ruhenden Systems für alle Punkte des letzteren bestimmt, in denen sich Uhren befinden; ebenso werde die Zeit τ des bewegten Systems für alle Punkte des bewegten Systems, in welchen sich relativ zu letzterem ruhende Uhren befinden, bestimmt durch Anwendung der in § 1 genannten Methode der Lichtsignale zwischen den Punkten, in denen sich die letzteren Uhren befinden.

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t , welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ , und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - vt$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z und t . Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der im § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X -Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Systeme anwendet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau \left(0, 0, 0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] \\ = \tau \left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

oder

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z .

Eine analoge Überlegung — auf die H - und Z -Achse angewandt — liefert, wenn man beachtet, daß sich das Licht längs dieser Achsen vom ruhenden System aus betrachtet stets mit der Geschwindigkeit $\sqrt{V^2 - v^2}$ fortpflanzt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da τ eine *lineare* Funktion ist:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

wobei a eine vorläufig unbekannte Funktion $\varphi(v)$ ist und der Kürze halber angenommen ist, daß im Anfangspunkte von k für $\tau = 0$ $t = 0$ sei.

Mit Hilfe dieses Resultates ist es leicht, die Größen ξ, η, ζ zu ermitteln, indem man durch Gleichungen ausdrückt, daß sich das Licht (wie das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip verlangt) auch im bewegten System gemessen mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt. Für einen zur Zeit $\tau = 0$ in Richtung der wachsenden ξ ausgesandten Lichtstrahl gilt:

$$\xi = V \tau,$$

oder

$$\xi = a V \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangs-

punkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V-v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V-v} = t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a \frac{V^3}{V^3 - v^3} x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegte Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = aV \left(t - \frac{v}{V^3 - v^3} x' \right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^3 - v^3}} = t; \quad x' = 0;$$

also

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^3 - v^3}} y$$

und

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^3 - v^3}} z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\tau = \varphi(v) \beta \left(t - \frac{v}{V^3} x \right),$$

$$\xi = \varphi(v) \beta (x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v) y,$$

$$\zeta = \varphi(v) z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden

System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V . Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System K derart in Paralleltranslationsbewegung parallel zur Ξ -Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ -Achse bewege. Zur Zeit $t=0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t=x=y=z=0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$t' = \varphi(-v) \beta(-v) \left\{ \tau + \frac{v}{V^2} \xi \right\} = \varphi(v) \varphi(-v) t,$$

$$x' = \varphi(-v) \beta(-v) \{ \xi + v \tau \} = \varphi(v) \varphi(-v) x,$$

$$y' = \varphi(-v) \eta = \varphi(v) \varphi(-v) y,$$

$$z' = \varphi(-v) \zeta = \varphi(v) \varphi(-v) z.$$

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander,

und es ist klar, daß die Transformation von K auf K' die identische Transformation sein muß. Es ist also:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Wir fragen nun nach der Bedeutung von $\varphi(v)$. Wir fassen das Stück der H -Achse des Systems k ins Auge, das zwischen $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ und $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0$ gelegen ist. Dieses Stück der H -Achse ist ein relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Achse bewegter Stab, dessen Enden in K die Koordinaten besitzen:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

und

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Die Länge des Stabes, in K gemessen, ist also $l/\varphi(v)$; damit ist die Bedeutung der Funktion φ gegeben. Aus Symmetriegründen ist nun einleuchtend, daß die im ruhenden System gemessene Länge eines bestimmten Stabes, welcher senkrecht zu seiner Achse bewegt ist, nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung und dem Sinne der Bewegung abhängig sein kann. Es ändert sich also die im ruhenden System gemessene Länge des bewegten Stabes nicht, wenn v mit $-v$ vertauscht wird. Hieraus folgt:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

oder

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aus dieser und der vorhin gefundenen Relation folgt, daß $\varphi(v) = 1$ sein muß, so daß die gefundenen Transformationsgleichungen übergehen in:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta (x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

§ 4. Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen, bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend.

Wir betrachten eine starre Kugel¹⁾ vom Radius R , welche relativ zum bewegten System k ruht, und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von k liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Die Gleichung dieser Oberfläche ist in x, y, z ausgedrückt zur Zeit $t=0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande — vom ruhenden System aus betrachtet — die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R.$$

Während also die Y - und Z -Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X -Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v=V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom „ruhenden“ System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen. Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos; wir werden übrigens in den folgenden Betrachtungen finden, daß die Lichtgeschwindigkeit in unserer Theorie physikalisch die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeiten spielt.

Es ist klar, daß die gleichen Resultate von im „ruhenden“ System ruhenden Körpern gelten, welche von einem gleichförmig bewegten System aus betrachtet werden. —

Wir denken uns ferner eine der Uhren, welche relativ zum ruhenden System ruhend die Zeit t , relativ zum bewegten

1) Das heißt einen Körper, welcher ruhend untersucht Kugelgestalt besitzt.

System ruhend die Zeit τ anzugeben befähigt sind, im Koordinatenursprung von k gelegen und so gerichtet, daß sie die Zeit τ angibt. Wie schnell geht diese Uhr, vom ruhenden System aus betrachtet?

Zwischen die Größen x , t und τ , welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right)$$

und

$$x = vt.$$

Es ist also

$$\tau = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

Hieraus ergibt sich folgende eigentümliche Konsequenz. Sind in den Punkten A und B von K ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v auf der Verbindungslinie nach B , so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht gegenüber der von Anfang an in B befindlichen um $\frac{1}{2} t v^2 / V^2$ Sek. (bis auf Größen vierter und höherer Ordnung) nach, wenn t die Zeit ist, welche die Uhr von A nach B braucht.

Man sieht sofort, daß dies Resultat auch dann noch gilt, wenn die Uhr in einer beliebigen polygonalen Linie sich von A nach B bewegt, und zwar auch dann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Nimmt man an, daß das für eine polygonale Linie bewiesene Resultat auch für eine stetig gekrümmte Kurve gelte, so erhält man den Satz: Befinden sich in A zwei synchron gehende Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkommt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der un-

bewegt gebliebenen um $\frac{1}{2} t(v/V)^2$ Sek. nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfenen, an einem Erdpole befindliche Uhr.

§ 5. Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

In dem längs der X -Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewegten System k bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen:

$$\xi = w_{\xi} \tau,$$

$$\eta = w_{\eta} \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

wobei w_{ξ} und w_{η} Konstanten bedeuten.

Gesucht ist die Bewegung des Punktes relativ zum System K . Führt man in die Bewegungsgleichungen des Punktes mit Hilfe der in § 3 entwickelten Transformationsgleichungen die Größen x, y, z, t ein, so erhält man:

$$x = \frac{w_{\xi} + v}{1 + \frac{v w_{\xi}}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_{\xi}}{V^2}} w_{\eta} t,$$

$$z = 0.$$

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nach unserer Theorie nur in erster Annäherung. Wir setzen:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_{\xi}^2 + w_{\eta}^2$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x};$$

α ist dann als der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten v und w anzusehen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha) - \left(\frac{vw \sin \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw \cos \alpha}{V^2}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß v und w in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch w die Richtung der X -Achse (Ξ -Achse), so erhalten wir:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als V , stets eine Geschwindigkeit kleiner als V resultiert. Setzt man nämlich $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, wobei κ und λ positiv und kleiner als V seien, so ist:

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Es folgt ferner, daß die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer „Unterlichtgeschwindigkeit“ nicht geändert werden kann. Man erhält für diesen Fall:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Wir hätten die Formel für U für den Fall, daß v und w gleiche Richtung besitzen, auch durch Zusammensetzen zweier Transformationen gemäß § 3 erhalten können. Führen wir neben den in § 3 figurierenden Systemen K und k noch ein drittes, zu k in Parallelbewegung begriffenes Koordinatensystem k' ein, dessen Anfangspunkt sich auf der Ξ -Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, so erhalten wir zwischen den Größen x, y, z, t und den entsprechenden Größen von k' Gleichungen, welche sich von den in § 3 gefundenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von „ v “ die Größe

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}$$

tritt; man sieht daraus, daß solche Paralleltransformationen — wie dies sein muß — eine Gruppe bilden.

Wir haben nun die für uns notwendigen Sätze der unseren zwei Prinzipien entsprechenden Kinematik hergeleitet und gehen dazu über, deren Anwendung in der Elektrodynamik zu zeigen.

II. Elektrodynamischer Teil.

§ 6. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum. Über die Natur der bei Bewegung in einem Magnetfeld auftretenden elektromotorischen Kräfte.

Die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum mögen gültig sein für das ruhende System K , so daß gelten möge:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

wobei (X, Y, Z) den Vektor der elektrischen, (L, M, N) den der magnetischen Kraft bedeutet.

Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \xi},$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum auch im System k gelten, wenn sie im System K gelten, d. h. daß für die im bewegten System k durch ihre ponderomotorischen Wirkungen auf elektrische bez. magnetische Massen definierten Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft $((X', Y' Z')$ und (L', M', N')) des bewegten Systems k die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Offenbar müssen nun die beiden für das System k gefundenen Gleichungssysteme genau dasselbe ausdrücken, da beide Gleichungssysteme den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für das System K äquivalent sind. Da die Gleichungen beider Systeme ferner bis auf die die Vektoren darstellenden Symbole übereinstimmen, so folgt, daß die in den Gleichungssystemen an entsprechenden Stellen auftretenden Funktionen bis auf einen für alle Funktionen des einen Gleichungssystems gemeinsamen, von ξ , η , ζ und τ unabhängigen, eventuell von v abhängigen Faktor $\psi(v)$ übereinstimmen müssen. Es gelten also die Beziehungen:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v) X, & L' &= \psi(v) L, \\ Y' &= \psi(v) \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), & M' &= \psi(v) \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z' &= \psi(v) \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right), & N' &= \psi(v) \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Umkehrung dieses Gleichungssystems, erstens durch Auflösen der soeben erhaltenen Gleichungen, zweitens durch Anwendung der Gleichungen auf die inverse Transformation (von k auf K), welche durch die Geschwindigkeit $-v$ charakterisiert ist, so folgt, indem man berücksichtigt, daß die beiden so erhaltenen Gleichungssysteme identisch sein müssen:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Ferner folgt aus Symmetriegründen¹⁾

$$\varphi(v) = \varphi(-v):$$

es ist also

$$\varphi(v) = 1,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), & M' &= \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right), & N' &= \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Zur Interpretation dieser Gleichungen bemerken wir folgendes. Es liegt eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche im ruhenden System K gemessen von der Größe „eins“ sei, d. h. im ruhenden System ruhend auf eine gleiche Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch im bewegten System gemessen von der Größe „eins“. Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zum ruhenden System, so ist definitionsgemäß der Vektor (X, Y, Z) gleich der auf sie wirkenden Kraft. Ruht die Elektrizitätsmenge gegenüber dem bewegten System (wenigstens in dem betreffenden Augenblick), so ist die auf sie wirkende, in dem bewegten System gemessene Kraft gleich dem Vektor (X', Y', Z') . Die ersten drei der obigen Gleichungen lassen sich mithin auf folgende zwei Weisen in Worte kleiden:

1. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so wirkt auf ihn außer der

1) Ist z. B. $X = Y = Z = L = M = 0$ und $N \neq 0$, so ist aus Symmetriegründen klar, daß bei Zeichenwechsel von v ohne Änderung des numerischen Wertes auch Y' sein Vorzeichen ändern muß, ohne seinen numerischen Wert zu ändern.

elektrischen Kraft eine „elektromotorische Kraft“, welche unter Vernachlässigung von mit der zweiten und höheren Potenzen von v/V multiplizierten Gliedern gleich ist dem mit der Lichtgeschwindigkeit dividierten Vektorprodukt der Bewegungsgeschwindigkeit des Einheitspoles und der magnetischen Kraft. (Alte Ausdrucksweise.)

2. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft, welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält. (Neue Ausdrucksweise.)

Analoges gilt über die „magnetomotorischen Kräfte“. Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen.

Es ist ferner klar, daß die in der Einleitung angeführte Asymmetrie bei der Betrachtung der durch Relativbewegung eines Magneten und eines Leiters erzeugten Ströme verschwindet. Auch werden die Fragen nach dem „Sitz“ der elektrodynamischen elektromotorischen Kräfte (Unipolarmaschinen) gegenstandslos.

§ 7. Theorie des Doppellerschen Prinzips und der Aberration.

Im Systeme K befinde sich sehr ferne vom Koordinatenursprung eine Quelle elektrodynamischer Wellen, welche in einem den Koordinatenursprung enthaltenden Raumteil mit genügender Annäherung durch die Gleichungen dargestellt sei:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega \left(t - \frac{ax + by + cz}{V} \right), \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Hierbei sind (X_0, Y_0, Z_0) und (L_0, M_0, N_0) die Vektoren, welche die Amplitude des Wellenzuges bestimmen, a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen.

Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Wellen, wenn dieselben von einem in dem bewegten System k ruhenden

Beobachter untersucht werden. — Durch Anwendung der in § 6 gefundenen Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte und der in § 3 gefundenen Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit erhalten wir unmittelbar:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', & M' &= \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', & N' &= \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi', \\ \Phi' &= \omega' \left(\tau - \frac{a' \xi + b' \eta + c' \zeta}{V} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right), \\ a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}}, \\ b' &= \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}, \\ c' &= \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Aus der Gleichung für ω' folgt: Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter“ mit der auf ein relativ zur Lichtquellerruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes durch die Gleichung gegeben:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}.$$

Dies ist das Doppellersche Prinzip für beliebige Geschwindig-

keiten. Für $\varphi = 0$ nimmt die Gleichung die übersichtliche Form an:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Man sieht, daß — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — für $v = -\infty$, $\nu = \infty$ ist.

Nennt man φ' den Winkel zwischen Wellennormale (Strahlrichtung) im bewegten System und der Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter“, so nimmt die Gleichung für α' die Form an:

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus. Ist $\varphi = \pi/2$, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Wir haben nun noch die Amplitude der Wellen, wie dieselbe im bewegten System erscheint, zu suchen. Nennt man A bez. A' die Amplitude der elektrischen oder magnetischen Kraft im ruhenden bez. im bewegten System gemessen, so erhält man:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

welche Gleichung für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Es folgt aus den entwickelten Gleichungen, daß für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V einer Lichtquelle näherte, diese Lichtquelle unendlich intensiv erscheinen müßte.

§ 8. Transformation der Energie der Lichtstrahlen. Theorie des auf vollkommene Spiegel ausgeübten Strahlungsdruckes.

Da $A^2/8\pi$ gleich der Lichtenergie pro Volumeneinheit ist, so haben wir nach dem Relativitätsprinzip $A'^2/8\pi$ als die Lichtenergie im bewegten System zu betrachten. Es wäre daher A'^2/A^2 das Verhältnis der „bewegt gemessenen“ und „ruhend gemessenen“ Energie eines bestimmten Lichtkomplexes, wenn das Volumen eines Lichtkomplexes in K gemessen und in k gemessen das gleiche wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen des Lichtes im ruhenden System, so wandert durch die Oberflächenelemente der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugel-
fläche

$$(x - V a t)^2 + (y - V b t)^2 + (z - V c t)^2 = R^2$$

keine Energie hindurch; wir können daher sagen, daß diese Fläche dauernd denselben Lichtkomplex umschließt. Wir fragen nach der Energiemenge, welche diese Fläche im System k betrachtet umschließt, d. h. nach der Energie des Lichtkomplexes relativ zum System k .

Die Kugel-
fläche ist — im bewegten System betrachtet — eine Ellipsoidfläche, welche zur Zeit $\tau = 0$ die Gleichung besitzt:

$$\left(\beta \xi - \alpha \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Nennt man S das Volumen der Kugel, S' dasjenige dieses Ellipsoides, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Nennt man also E die im ruhenden System gemessene, E' die im bewegten System gemessene Lichtenergie, welche von der betrachteten Fläche umschlossen wird, so erhält man:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

welche Formel für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Energie und die Frequenz eines Lichtkomplexes sich nach demselben Gesetze mit dem Bewegungszustande des Beobachters ändern.

Es sei nun die Koordinatenebene $\xi = 0$ eine vollkommen spiegelnde Fläche, an welcher die im letzten Paragraph betrachteten ebenen Wellen reflektiert werden. Wir fragen nach dem auf die spiegelnde Fläche ausgeübten Lichtdruck und nach der Richtung, Frequenz und Intensität des Lichtes nach der Reflexion.

Das einfallende Licht sei durch die Größen A , $\cos \varphi$, v (auf das System K bezogen) definiert. Von k aus betrachtet sind die entsprechenden Größen:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi},$$

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Für das reflektierte Licht erhalten wir, wenn wir den Vorgang auf das System k beziehen:

$$A'' = A',$$

$$\cos \varphi'' = -\cos \varphi',$$

$$v'' = v'.$$

Endlich erhält man durch Rücktransformieren aufs ruhende System K für das reflektierte Licht:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2 \frac{v}{V}}{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$v''' = v'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = v \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Die auf die Flächeneinheit des Spiegels pro Zeiteinheit auftreffende (im ruhenden System gemessene) Energie ist offenbar $A^2/8\pi (V \cos \varphi - v)$. Die von der Flächeneinheit des Spiegels in der Zeiteinheit sich entfernende Energie ist $A'''^2/8\pi (-V \cos \varphi''' + v)$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Energieprinzip die vom Lichtdrucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Setzt man die letztere gleich dem Produkt $P \cdot v$, wobei P der Lichtdruck ist, so erhält man:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In erster Annäherung erhält man in Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit anderen Theorien

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Nach der hier benutzten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche ist, daß die elektrische und magnetische Kraft des Lichtes, welches durch einen bewegten Körper beeinflußt wird, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wird jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückgeführt.

§ 9. Transformation der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen
mit Berücksichtigung der Konvektionsströme.

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \rho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \rho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

wobei

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

die 4π -fache Dichte der Elektrizität und (u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität bedeutet. Denkt man sich die elektrischen Massen unveränderlich an kleine, starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden, so sind diese Gleichungen die elektromagnetische Grundlage der Lorentz'schen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche im System K gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen von § 3 und § 6 auf das System k , so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \xi}, & \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \xi} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \xi} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} &= u_\xi, \\ \frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\eta, & \rho' &= \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \xi} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{V^2} \right) \rho, \\ \frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2} \right)} &= u_\zeta.\end{aligned}$$

Da — wie aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten (§ 5) folgt — der Vektor (u_x, u_y, u_z) nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der elektrischen Massen im System k gemessen, so ist damit gezeigt, daß unter Zugrundelegung unserer kinematischen Prinzipien die elektrodynamische Grundlage der Lorentzschen Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper dem Relativitätsprinzip entspricht.

Es möge noch kurz bemerkt werden, daß aus den entwickelten Gleichungen leicht der folgende wichtige Satz gefolgert werden kann: Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper beliebig im Raume und ändert sich hierbei seine Ladung nicht, von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, so bleibt seine Ladung auch — von dem „ruhenden“ System K aus betrachtet — konstant.

§ 10. Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung ϵ versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron“ genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir nur folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einer bestimmten Epoche, so erfolgt in dem nächsten Zeiteilchen die Bewegung des Elektrons nach den Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \epsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \epsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \epsilon Z,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Elektrons, μ die Masse des Elektrons bedeutet, sofern dasselbe langsam bewegt ist.

Es besitze nun zweitens das Elektron in einer gewissen Zeitepoche die Geschwindigkeit v . Wir suchen das Gesetz, nach welchem sich das Elektron im unmittelbar darauf folgenden Zeiteilchen bewegt.

Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinflussen, können und wollen wir annehmen, daß das Elektron in dem Momente, wo wir es ins Auge fassen, sich im Koordinaten-

sprung befinde und sich längs der X -Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewege. Es ist dann einleuchtend, daß das Elektron im genannten Momente ($t = 0$) relativ zu einem längs der X -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v parallelbewegten Koordinatensystem k ruht.

Aus der oben gemachten Voraussetzung in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip ist klar, daß sich das Elektron in der unmittelbar folgenden Zeit (für kleine Werte von t) vom System k aus betrachtet nach den Gleichungen bewegt:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = e X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = e Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = e Z',$$

wobei die Zeichen $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ sich auf das System k beziehen. Setzen wir noch fest, daß für $t = x = y = z = 0$ $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so gelten die Transformationsgleichungen der §§ 3 und 6, so daß gilt:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \beta (x - v t), \quad X' = X,$$

$$\eta = y, \quad Y' = \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right),$$

$$\zeta = z, \quad Z' = \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen transformieren wir die obigen Bewegungsgleichungen vom System k auf das System K und erhalten:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta^2} X, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M \right). \end{cases}$$

Wir fragen nun in Anlehnung an die übliche Betrachtungsweise nach der „longitudinalen“ und „transversalen“ Masse

des bewegten Elektrons. Wir schreiben die Gleichungen (A) in der Form

$$\begin{aligned}\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ \mu \beta^3 \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right) = \varepsilon Y', \\ \mu \beta^3 \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right) = \varepsilon Z'\end{aligned}$$

und bemerken zunächst, daß $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ die Komponenten der auf das Elektron wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, und zwar in einem in diesem Moment mit dem Elektron mit gleicher Geschwindigkeit wie dieses bewegten System betrachtet. (Diese Kraft könnte beispielsweise mit einer im letzten System ruhenden Federwage gemessen werden.) Wenn wir nun diese Kraft schlechtweg „die auf das Elektron wirkende Kraft“ nennen und die Gleichung

$$\text{Massenzahl} \times \text{Beschleunigungszahl} = \text{Kraftzahl}$$

aufrechterhalten, und wenn wir ferner festsetzen, daß die Beschleunigungen im ruhenden System K gemessen werden sollen, so erhalten wir aus obigen Gleichungen:

$$\text{Longitudinale Masse} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2} \right)^3},$$

$$\text{Transversale Masse} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}.$$

Natürlich würde man bei anderer Definition der Kraft und der Beschleunigung andere Zahlen für die Massen erhalten; man ersieht daraus, daß man bei der Vergleichung verschiedener Theorien der Bewegung des Elektrons sehr vorsichtig verfahren muß.

Wir bemerken, daß diese Resultate über die Masse auch für die ponderablen materiellen Punkte gilt; denn ein ponderabler materieller Punkt kann durch Zufügen einer *beliebig kleinen* elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.

Wir bestimmen die kinetische Energie des Elektrons. Bewegt sich ein Elektron vom Koordinatenursprung des Systems K aus mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 beständig auf der

X -Achse unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft X , so ist klar, daß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie den Wert $\int \varepsilon X dx$ hat. Da das Elektron langsam beschleunigt sein soll und infolgedessen keine Energie in Form von Strahlung abgeben möge, so muß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie gleich der Bewegungsenergie W des Elektrons gesetzt werden. Man erhält daher, indem man beachtet, daß während des ganzen betrachteten Bewegungsvorganges die erste der Gleichungen (A) gilt:

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W wird also für $v = V$ unendlich groß. Überlichtgeschwindigkeiten haben — wie bei unseren früheren Resultaten — keine Existenzmöglichkeit.

Auch dieser Ausdruck für die kinetische Energie muß dem oben angeführten Argument zufolge ebenso für ponderable Massen gelten.

Wir wollen nun die aus dem Gleichungssystem (A) resultierenden, dem Experimente zugänglichen Eigenschaften der Bewegung des Elektrons aufzählen.

1. Aus der zweiten Gleichung des Systems (A) folgt, daß eine elektrische Kraft Y und eine magnetische Kraft N dann gleich stark ablenkend wirken auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron, wenn $Y = N \cdot v/V$. Man ersieht also, daß die Ermittlung der Geschwindigkeit des Elektrons aus dem Verhältnis der magnetischen Ablenkbarkeit A_m und der elektrischen Ablenkbarkeit A_e nach unserer Theorie für beliebige Geschwindigkeiten möglich ist durch Anwendung des Gesetzes:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Diese Beziehung ist der Prüfung durch das Experiment zugänglich, da die Geschwindigkeit des Elektrons auch direkt, z. B. mittels rasch oszillierender elektrischer und magnetischer Felder, gemessen werden kann.

2. Aus der Ableitung für die kinetische Energie des Elektrons folgt, daß zwischen der durchlaufenen Potential-

differenz und der erlangten Geschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung gelten muß:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{e} v^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Wir berechnen den Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N (als einzige ablenkende Kraft) vorhanden ist. Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhalten wir:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{s}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder

$$R = v^2 \frac{\mu}{s} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Diese drei Beziehungen sind ein vollständiger Ausdruck für die Gesetze, nach denen sich gemäß vorliegender Theorie das Elektron bewegen muß.

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)

La inèrcia d'un cos, depèn de l'energia que conté?

Traducció de Xavier Roqué.

La inèrcia d'un cos, depèn de l'energia que conté?

Els resultats d'una recerca sobre electrodinàmica que he publicat recentment en aquests *Annalen*¹ tenen una conseqüència molt interessant, que deduïm a continuació.

En aquell article postulava, a més de les equacions de Maxwell-Hertz per a l'espai buit i l'expressió de Maxwell per a l'energia electromagnètica de l'espai, el principi següent:

Les lleis que regulen els canvis de l'estat dels sistemes físics són independents del fet que referim aquests canvis a l'un o l'altre de dos sistemes de coordenades que es troben en moviment relatiu de translació paral·lela i uniforme (principi de relativitat).

A partir d'aquests fonaments² vaig deduir, entre d'altres, el resultat següent (*loc. cit.* apartat 8):

Considerem un sistema d'ones de llum planes que té l'energia l referida al sistema de coordenades (x, y, z) i la direcció de propagació del qual (normal a les ones) forma l'angle φ amb l'eix x del sistema. Introduïm un altre sistema de coordenades (ξ, η, ζ) , en translació paral·lela i uniforme respecte del sistema (x, y, z) , l'origen del qual es mou al llarg de l'eix x amb velocitat v . Aquesta quantitat de llum* té, mesurada des del sistema (ξ, η, ζ) , l'energia:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

on V denota la velocitat de la llum. A continuació utilitzarem aquest resultat.

¹A. EINSTEIN, *Annalen der Physik*, **17**, 891 (1905). [EINSTEIN (1905c)].

²El principi de constància de la velocitat de la llum està implícit, naturalment, en les equacions de Maxwell.

**Lichtmenge*. Com el terme *complex de llum* (*Lichtkomplex*), utilitzat en el primer article sobre relativitat, aquesta expressió vol subratllar l'existència de la llum com a entitat física autònoma.

Suposem que en el sistema (x, y, z) hi ha un cos en repòs, l'energia del qual —referida al sistema (x, y, z) — és E_0 . L'energia del cos respecte del sistema (ξ, η, ζ) , que es mou amb velocitat v , és H_0 .

Suposem que aquest cos emet ones de llum planes d'energia $L/2$ —mesurada respecte de (x, y, z) — en una direcció que forma l'angle φ amb l'eix x i, simultàniament, una quantitat de llum idèntica en la direcció oposada. Durant aquest procés, el cos resta en repòs respecte del sistema (x, y, z) . El procés ha de satisfer el principi [de conservació] de l'energia i això, segons el principi de relativitat, en tots dos sistemes de coordenades. Si anomenem E_1 i H_1 l'energia del cos després de l'emissió de llum —mesurada en el sistema (x, y, z) i (ξ, η, ζ) , respectivament— i usem la relació donada més amunt, obtenim:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right], \\ H_0 &= H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \right] \\ &= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Si restem aquestes equacions, obtenim:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Les dues diferències de la forma $H - E$ que apareixen en aquesta equació tenen una interpretació física senzilla. H i E són valors de

l'energia d'un mateix cos, referits a dos sistemes de coordenades que es mouen l'un respecte de l'altre, de manera que el cos està en repòs en un d'aquests sistemes —el sistema (x, y, z) . És clar, a més, que la diferència $H - E$ només es distingeix de l'energia cinètica K del cos referida a l'altre sistema —el sistema (ξ, η, ζ) — en una constant additiva C , que depèn de l'elecció de les constants additives arbitràries de les energies H i E . Podem posar, doncs:

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= K_0 + C, \\ H_1 - E_1 &= K_1 + C, \end{aligned}$$

ja que que C no varia durant l'emissió de llum. Així obtenim:

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

L'energia cinètica del cos, referida a (ξ, η, ζ) , disminueix a conseqüència de l'emissió de llum en una quantitat independent de les qualitats del cos. A més, la diferència $K_0 - K_1$ depèn de la velocitat de la mateixa manera que en depèn l'energia cinètica de l'electró (*loc. cit.* apartat 10).

Negligint magnituds de quart o d'ordre superior, podem posar:*

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

Aquesta equació implica directament:

Si un cos emet l'energia L en forma de radiació, la seva massa disminueix en L/V^2 . Evidentment, no és essencial que l'energia sostreta al cos es transformi directament en energia de radiació, de manera que arribem a una conclusió més general:

*En aquest ordre d'aproximació, l'energia cinètica adopta l'expressió $\frac{1}{2}mv^2$.

La massa d'un cos és una mesura de l'energia que conté. Si l'energia varia en L , la massa varia en el mateix sentit en $L/9 \cdot 10^{20}$, quan es mesura l'energia en ergs i la massa en grams.

No s'ha d'excloure la possibilitat que puguem contrastar la teoria en cossos el contingut energètic dels quals varia molt (com ara les sals de radi).

Si la teoria correspon als fets, llavors la radiació transfereix inèrcia entre els cossos emissors i els absorbents.

«Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?»

Annalen der Physik, **18**, 639–641 (1905).

Datat: Berna, setembre de 1905.

Rebut: 27 de setembre de 1905.

Publicat: 21 de novembre de 1905.

**13. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem
Energieinhalt abhängig?
von A. Einstein.**

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung¹⁾ führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen²⁾ leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l ; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x -Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0 .

Dieser Körper sende in einer mit der x -Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z) . Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H - E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen addi-

tiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$

$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Unter Vernachlässigung von Größen vierter und höherer Ordnung können wir setzen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2 . Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L , so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9 \cdot 10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Gramm gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905.)



Figura 11: Einstein a l'Ajuntament de Barcelona, amb la seva esposa Elsa. Al seu costat, E. Maynés, alcalde accidental de Barcelona; una persona desconeguda; E. Alcobé, president de l'Acadèmia de Ciències i Arts; l'enginyer C. Lana Sarrate, i U. von Hassell, cònsol d'Alemanya. Fons Brangulí (fotògrafs), Arxiu Nacional de Catalunya (ANC)



Figura 12: Einstein a l'Escola Industrial. D'esquerra a dreta: una persona desconeguda; P. Mias, conseller de la Mancomunitat; A. Einstein; F. Planell; I. Lana Sarrate, i R. Campalans. Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, (ETSEIB)



Figura 13: Einstein a Poblet. A l'esquerra de la fotografia, R. Campalans i, a la dreta, B. Lassaletta. Archivo General de la Administración, Alcalá de Henares



Figura 14: Einstein fent una parada en l'excursió de Poblet. Archivo General de la Administración, Alcalá de Henares



Figura 15: Einstein al Tibidabo. A la dreta, J. Puig i Cadafalch, president de la Mancomunitat de Catalunya. Archivo General de la Administración, Alcalá de Henares



Figura 16: Einstein a l'escullera del port de Barcelona. Família Terradas

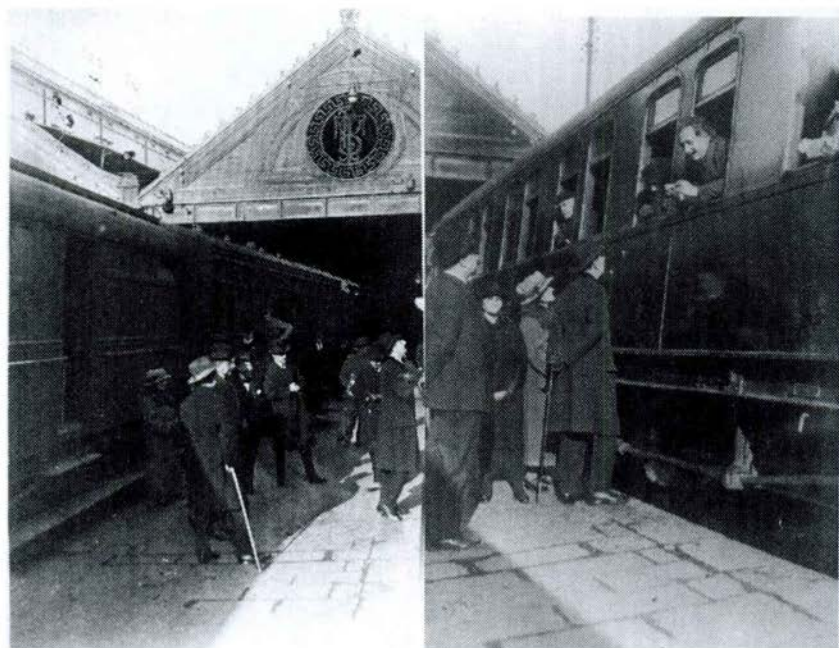


Figura 17: Dues instantànies del comiat d'Einstein a l'estació de França de Barcelona. A la de l'esquerra (i d'esquerra a dreta), I. von Tirpitz, E. Terrades, J. Puig i Cadafalch, una persona desconeguda i B. Lassaletta o F. Planell. Família Terradas. A la de la dreta, Einstein al tren i, a l'andana (d'esquerra a dreta), E. Terradas, la seva filla Maria Lluïsa, I. von Tirpitz i U. von Hassell. Arxiu Històric de la Ciutat de Barcelona

Bibliografia

- ABIKO, S. (1991) «On the chemico-thermal origins of Einstein's special relativity». *Historical Studies in the Physical Sciences*, **26**, 241–312.
- BARTHOLOMEW, J. D. (1982) *Stochastic models for social processes*. London, J. Wiley. (Primera edició, 1973).
- BECK, A. (1987) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 1). *The early years, 1879–1902. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- BECK, A. (1989) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 2). *The Swiss years: writings, 1900–1909. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- BECK, A. (1993) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 3). *The Swiss years: writings, 1909–1911. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- BECK, A. (1995) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 5). *The Swiss years: correspondence, 1902–1914. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- BECK, A. (1996) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 4). *The Swiss years: writings, 1912–1914. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- BOHR, N.; KRAMERS, H. A.; SLATER, C. (1924) «The quantum theory of radiation». *Philosophical Magazine*, **47**, 785–822. Reproduït a: VAN DER WAERDEN (1967), 159–176.
- BORN, M. (1949) «Einstein's statistical theories». A: SCHILPP (1970), 161–177.
- BLUMENTHAL, O. (ed.) (1913) *Das Relativitätsprinzip: Eine Sammlung von Abhandlungen*. Leipzig, Teubner. Traduït a l'anglès el 1923 com: *The principle of relativity: an original collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*. London, Methuen.
- BRUSH, S. G. (1976) *The kind of motion we call heat. A history of the kinetic theory of gases in the 19th century*. (2 vol.). Amsterdam, North-Holland.

- BUCHERER, A. H. (1908) «Messungen an Becquerelstrahlen: Die experimentelle Bestätigung der Lorentz-Einsteinschen Theorie». *Physikalische Zeitschrift*, **9**, 755–762.
- BUCHERER, A. H. (1909) «Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips». *Annalen der Physik*, **28**, 513–536.
- BUCHWALD, J. (ed.) (1985) *From Maxwell to microphysics. Aspects of electromagnetic theory in the last quarter of the nineteenth century*. Chicago, The University of Chicago Press.
- CASSIDY, D. (1986) «Understanding the history of special relativity». *History of Science*, **16**, 177–195.
- COLLINS, H.; PINCH, T. (1993) *The golem. What everyone should know about science*. Cambridge, Cambridge University Press. Traducció castellana: *El golem. Lo que todos deberíamos saber acerca de la ciencia*. Barcelona, Crítica, 1996.
- COLLINS, H.; PINCH, T. (1998) *The golem at large. What everyone should know about technology*. Cambridge, Cambridge University Press.
- DARRIGOL, O. (1990) «Introduction». A: BALIBAR, F. (ed). *Albert Einstein. Œuvres choisies*, vol. 2, Paris, Seuil, 9–25.
- DARRIGOL, O. (1996) «The electrodynamic origins of relativity theory». *Historical Studies in the Physical Sciences*, **26**, 241–312.
- DARRIGOL, O. (2000) *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford, Oxford University Press.
- DARRIGOL, O. (2004) «The Mystery of the Einstein-Poincaré Connection». *Isis*, **26**, 241–312.
- DRUDE, P. (1894) *Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage*. Stuttgart, Ferdinand Enke.
- EINSTEIN, A. (1901) «Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen». *Annalen der Physik*, **4**, 513–523. Reproduït a: STACHEL (1989), 9–21. Traducció anglesa a: BECK (1989), 1–11.
- EINSTEIN, A. (1902a) «Ueber die thermodynamische Theorie der Potentialdifferenz zwischen Metallen und vollständig dissociirten Lösungen ihrer Salze und über eine elektrische Methode zur Erforschung der Molecularkräfte». *Annalen der Physik*, **8**, 798–814. Reproduït a: STACHEL (1989), 22–40. Traducció anglesa a: BECK (1989), 12–29.

- EINSTEIN, A. (1902b) «Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik». *Annalen der Physik*, **9**, 417–433. Reproduït a: STACHEL (1989), 56–75. Traducció anglesa a: BECK (1989), 30–47.
- EINSTEIN, A. (1903) «Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik». *Annalen der Physik*, **11**, 170–187. Reproduït a: STACHEL (1989), 76–97. Traducció anglesa a: BECK (1989), 48–67.
- EINSTEIN, A. (1904) «Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme». *Annalen der Physik*, **14**, 354–362. Reproduït a: STACHEL (1989), 98–108. Traducció anglesa a: BECK (1989), 68–77.
- EINSTEIN, A. (1905a) «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt». *Annalen der Physik*, **17**, 132–148. Reproduït i traduït en aquest volum.
- EINSTEIN, A. (1905b) «Über die von molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Annalen der Physik*, **17**, 549–560. Reproduït i traduït en aquest volum.
- EINSTEIN, A. (1905c) «Zur Elektrodynamik bewegter Körper». *Annalen der Physik*, **17**, 891–921. Reproduït i traduït en aquest volum.
- EINSTEIN, A. (1905d) «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig». *Annalen der Physik*, **18**, 639–641. Reproduït i traduït en aquest volum.
- EINSTEIN, A. (1906a) «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen». *Annalen der Physik*, **19**, 289–305. Reproduït a: STACHEL (1989), 183–205. Traducció anglesa a: BECK (1989), 104–122.
- EINSTEIN, A. (1906b) «Zur Theorie der Brownschen Bewegung». *Annalen der Physik*, **19**, 371–381. Reproduït a: STACHEL (1989), 333–345. Traducció anglesa a: BECK (1989), 180–190.
- EINSTEIN, A. (1906c) «Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie». *Annalen der Physik*, **20**, 627–633. Reproduït a: STACHEL (1989), 359–356. Traducció anglesa a: BECK (1989), 200–206.

- EINSTEIN, A. (1907a) «Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest: "Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz"». *Annalen der Physik*, **23**, 206–208. Reproduït a: STACHEL (1989), 409–412. Traducció anglesa a: BECK (1989), 236–237.
- EINSTEIN, A. (1907b) «Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie». *Annalen der Physik*, **23**, 371–384. Reproduït a: STACHEL (1989), 413–428. Traducció anglesa a: BECK (1989), 238–250.
- EINSTEIN, A. (1907c) «Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen». *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, **4**, 411–462. Reproduït a: STACHEL (1989), 432–488. Traducció anglesa a: BECK (1989), 252–311.
- EINSTEIN, A. (1911) «Berichtigung zu meiner Arbeit: "Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen"». *Annalen der Physik*, **34**, 591–592. Reproduït a: KLEIN et al. (1993a), 416–417. Traducció anglesa a: BECK (1993), 336–337.
- EINSTEIN, A. (1935) «Elementary derivation of the equivalence of mass and energy». *Bulletin of the American Mathematical Society*, **41**, 223–230.
- EINSTEIN, A. (1949) *Autobiographisches (Autobiographical Notes)*. A SCHILPP (1949), 2–94 (edició bilingüe). Traducció castellana de Miguel Paredes: *Notas autobiográficas*. Madrid, Alianza, 1984.
- EINSTEIN, A. (2000) *Albert Einstein. La teoria de la relativitat i altres textos*. Introducció, traducció i notes de X. Roqué. Barcelona, Pòrtic; Institut d'Estudis Catalans; Vic, Eumo.
- EINSTEIN, A.; MARIČ, M. (1990) *Cartas a Mileva*. Introducció de José Manuel Sánchez Ron, traducció de Vicente Romano. Madrid, Mondadori. Conté les 51 cartes entre Einstein i Mileva publicades a: STACHEL (1987).
- ENGEL, A. (1997) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 6). *The Berlin years: writings, 1914–1917. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- ETXEBARRIA BILBAO, U. (1996) «Aspectos retóricos en "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"». *Llull*, **19**, 425–453.

- FLORES, F. (1998) «Einstein's 1935 derivation of $E = mc^2$ ». *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **29**, 223–243.
- FÖPPL, P. (1894) *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität*. Leipzig, Teubner.
- FÜRTH, R. (ed.) (1956) *Albert Einstein. Investigations on the theory of the Brownian movement*. New York, Dover. (Versió original alemanya, 1926).
- GALILEI, G. (1890–1909) *Le opere di Galileo Galilei*. Edició a cura d'Antonio Favaro. Firenze, Edizione Nazionale.
- GALILEI, G. (1994) *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano*. Edició d'Antonio Beltrán. Madrid, Alianza.
- GALISON, P. (2003) *Einstein's clocks, Poincaré's maps: empires of time*. New York, Norton.
- GARCÍA DONCEL, M.; ROQUÉ, X. (1990) *Heinrich Hertz. Las ondas electromagnéticas*. Selección de las *Untersuchungen*. Barcelona, Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya; Bellaterra, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- GIBBS, J. W. (1902) *Elementary principles in statistical mechanics*. Yale, Yale University Press. Reimprès el 1981, Woodbridge (Connecticut), Ox Bow Press.
- HENTSCHEL, A. M. (1998) *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 8). *The Berlin years: correspondence, 1914–1918. English translation*. Princeton, Princeton University Press.
- HENTSCHEL, K. (1992) «Einstein's attitude towards experiments: testing relativity theory 1907–1927». *Studies in History and Philosophy of Science*, **23**, 593–624.
- HERTZ, H. (1888) «Ueber electrodynamische Wellen im Luftraum und deren Reflexion». *Annalen der Physik und Chemie*, **34**, 133–146. Traducció castellana a GARCÍA DONCEL, ROQUÉ (1990), 91–105.
- HERTZ, H. (1889) «Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie». *Annalen der Physik und Chemie*, **36**, 1–13. Traducció castellana a GARCÍA DONCEL; ROQUÉ (1990), 107–126.

- HERTZ, H. (1890) «Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper». *Annalen der Physik und Chemie*, **41**, 369–399.
- HERTZ, H. (1892) *Untersuchungen ueber die Ausbreitung der electrischen Kraft*. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. Traducció parcial castellana a GARCÍA DONCEL, ROQUÉ (1990).
- HIROSIGE, T. (1966) «Electrodynamics before the theory of relativity, 1890–1905». *Japanese Studies in the History of Science*, **5**, 1–49.
- HIROSIGE, T. (1976) «The ether problem, the mechanistic world-view, and the origins of the theory of relativity». *Historical Studies in the Physical Sciences*, **7**, 3–85.
- HOLTON, G. (1969) «Einstein, Michelson, and the “crucial” experiment». *Isis*, **60**, 133–197. Traducció castellana a HOLTON (1982), 204–293.
- HOLTON, G. (1982) *Ensayos sobre el pensamiento científico en la época de Einstein*. Madrid, Alianza Universidad. (Versió original anglesa, 1973).
- HOLTON, G. (1993) «Quanta, relativity, and rhetoric». A: HOLTON, G. *Science and Anti-Science*. Cambridge (MA), Harvard University Press, 74–108.
- HON, G. (1995) «Is the identification of experimental error contextually dependent? The case of Kaufmann’s experiment and its varied reception». A: BUCHWALD, J. Z. *Scientific Practice: theories and stories of doing physics*, Chicago, The University of Chicago Press, 170–223.
- HUGHES, T. P. (1993) «Einstein, inventors, and invention». *Science in Context*, **6**, 25–42.
- HUNT, B. (1991) *The Maxwellians*. Ithaca, Cornell University Press.
- JAMMER, M. (1961) *Concepts of mass in classical and modern physics*. Cambridge, MA, Harvard University Press.
- JUNGNICKEL, C.; MCCORMMACH, R. (1986) *Intellectual mastery of nature: theoretical physics from Ohm to Einstein*. (2 vol.). Chicago, The University of Chicago Press.
- KAUFMANN, W. (1906) «Über die Konstitution des Elektrons». *Annalen der Physik*, **19**, 487–553.

- KLEIN, M. J. (1967) «Thermodynamics in Einstein's thought». *Science*, **157**, 509–516.
- KLEIN, M. J.; KOX, A. J.; RENN, J.; SCHULMANN, R. (ed.) (1993a) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 3). *The Swiss years: writings, 1909–1911*. Princeton, Princeton University Press.
- KLEIN, M. J.; KOX, A. J.; SCHULMANN, R. (ed.) (1993b) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 5). *The Swiss years: correspondence, 1902–1914*. Princeton, Princeton University Press.
- KLEIN, M. J.; KOX, A. J.; RENN, J.; SCHULMANN, R. (ed.) (1995) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 4). *The Swiss years: writings, 1912–1914*. Princeton, Princeton University Press.
- KOX, A. J.; KLEIN, M. J.; SCHULMANN, R. (ed.) (1996) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 6). *The Berlin years: writings, 1914–1917*. Princeton, Princeton University Press.
- KRAGH, H. (1999) *Quantum generations. A history of physics in the twentieth century*. Princeton: Princeton University Press.
- KUHN, T. S. (1980) *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894–1912*. Madrid, Alianza Editorial. (Versió original anglesa, 1978).
- LANGEVIN, P. (1908) «Sur la théorie du mouvement brownien». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, **146**, 530–533.
- LARMOR, J. (1900) *Aether and matter*. Cambridge, Cambridge University Press.
- LAUB, J. J. (1910) «Über die experimentellen Grundlagen des Relativitätsprinzip». *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, **7**, 405–463.
- LEWIS, G. N. (1926) «The conservation of photons». *Nature*, **118**, 874–875.
- LOCKE, D. (1992) *Science as writing*. New Haven, Yale University Press. Traducció castellana: *La ciencia como escritura*, Madrid, Cátedra, 1997.
- LORENTZ, H. A. (1895) *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. Leiden, Brill.

- LORENTZ, H. A. (1931) *Lectures on theoretical physics*. London, Macmillan.
- MAXWELL, J. C. (1873) *A treatise on electricity and magnetism*. (2 vol.). Oxford, Clarendon Press.
- MCCAUSLAND, I. (1984) «Einstein and special relativity: Who wrote the added footnotes». *British Journal for the Philosophy of Sciences*, **35**, 60–61.
- MCCORMMACH, R. (1970) «Einstein, Lorentz, and the electron theory». *Historical Studies in the Physical Sciences*, **2**, 41–87.
- MERLEAU-PONTY, J. (1994) *Albert Einstein. Vida, obra y filosofía*. Madrid, Alianza Editorial. (Versió original francesa de 1993).
- MICHELSON, A. A. (1881) «The relative motion of the earth and the luminiferous ether». *American Journal of Science*, **22**, 120–129.
- MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. (1887) «On the relative motion of the earth and the luminiferous ether». *American Journal of Science*, **34**, 333–345. Traducció parcial castellana a: WILLIAMS (1968), 34–45.
- MILLER, A. I. (1981a) «Unipolar induction: a case-study of the interaction between science and technology». *Annals of Science*, **38**, 155–189.
- MILLER, A. I. (1981b) *Albert Einstein's special theory of relativity: emergence (1905) and early interpretation (1905–1911)*. Reading, MA, Addison-Wesley.
- NAVARRO, L. (1990) *Einstein, profeta y hereje*. Barcelona, Tusquets.
- NAVARRO, L. (1998) «Gibbs, Einstein and the foundations of statistical mechanics». *Archive for History of Exact Sciences*, **53**, 147–180.
- NAVARRO, L.; PÉREZ, E. (2004) «Paul Ehrenfest on the necessity of quanta (1911): discontinuity, quantization, corpuscularity and adiabatic invariance». *Archive for History of Exact Sciences*, **58**, 97–141.
- PAIS, A. (1984) *'El Señor es sutil...' La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Barcelona, Ariel. (Versió original anglesa, 1982).

- PATY, M. (1993) *Einstein philosophe. La physique comme pratique philosophique*. Paris, Presses Universitaires de France.
- PERRIN, J. (1909) «Mouvement brownien et réalité moléculaire». *Annales de Chimie et de Physique*, **18**, 5–114.
- POINCARÉ, H. (1902) *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion.
- POINCARÉ, H. (1905) «Sur la dynamique de l'électron». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, **140**, 1504–1508.
- POINCARÉ, H. (1906) «Sur la dynamique de l'électron». *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **21**, 129–175.
- PYENSON, L. (1982) «Audacious enterprise: the Einsteins and electrotechnology in late nineteenth-century Munich». *Historical Studies in the Physical Sciences*, **12**, 373–392.
- ROQUÉ, X. (1997) «The manufacture of the positron». *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **28**, 73–129.
- SCHILPP, P. A. (1970) *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. (The Library of Living Philosophers). La Salle (Illinois), The Open Court. (Primera edició, 1949).
- SCHULMANN, R. (1993) «Einstein at the patent office: exile, salvation, or tactical retreat?». *Science in Context*, **6**, 25–42.
- SCHULMANN, R.; KOX, A. J.; JANSSEN, M.; ILLY, J. (ed.) (1998) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 8). *The Berlin years: correspondence, 1914–1918. Part A: 1914–1917. Part B: 1918*. Princeton, Princeton University Press.
- SMITH, C.; WISE, M. N. (1989) *Energy and empire. A biographical study of Lord Kelvin*. Cambridge, Cambridge University Press.
- SMOLUCHOWSKI, M. VON (1906) «Zur kinetischen Theorie of Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen». *Annalen der Physik*, **21**, 756–780.
- SOPKA, R. K. (ed.) (1986) *Physics for a new century. Papers presented at the 1904 St. Louis Congress*. New York, American Institute of Physics.
- SPEZIALI, P. (ed.) (1994) *Albert Einstein. Correspondencia con Michele Besso (1903–1955)*. Tusquets, Barcelona. (Primera edició, en alemany i anglès, de 1972. La traducció espanyola és de la versió francesa, de 1979).

- STACHEL, J. (1982) «Einstein and Michelson: The context of discovery and the context of justification». *Astronomische Nachrichten*, **303**, 47–53.
- STACHEL, J. (ed.) (1987) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 1). *The early years 1879–1902*. Princeton, Princeton University Press.
- STACHEL, J. (ed.) (1989) *Albert Einstein. Collected papers* (vol. 2). *The Swiss years: writings, 1900–1909*. Princeton, Princeton University Press.
- STACHEL, J.; TORRETTI, R. (1982) «Einstein's first derivation of mass-energy equivalence». *American Journal of Physics*, **50**, 760–763.
- STALEY, R. (1998) «On the histories of relativity: the propagation and elaboration of relativity theory in participant histories in Germany, 1905–1911». *Isis*, **89**, 263–299.
- STALEY, R. (en premsa) *Physics circa 1900. Einstein's generation and the relativity revolution*. Chicago, The University of Chicago Press.
- STUEWER, R. (1993) «Mass-energy and the neutron in the early thirties». *Science in Context*, **6**, 195–238.
- SWENSON, L. S. (1972) *The ethereal aether: a history of the Michelson-Morley-Miller aether-drift experiments, 1880–1930*. Austin, University of Texas Press.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (ed.) (1967) *Sources of quantum mechanics*. Amsterdam, North-Holland.
- WAX, N. (ed.) (1954) *Selected papers on noise and stochastic processes*. New York, Dover.
- WIEN, W. (1901) «Über die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik». *Annalen der Physik*, **5**, 501–513.
- WILLIAMS, L. P. (ed.) (1968) *Relativity theory: its origins and impact on modern thought*. New York, John Wiley & Sons. Traducció castellana de Miguel Paredes: *La teoría de la relatividad: sus orígenes e impacto sobre el pensamiento moderno*. Madrid, Alianza, 1973.

Índex alfabètic

Aargau

escola cantonal d', 19

aberració

estel·lar, 149, 150

lleï d', 182

absolut

espai, 138

moviment, 143

temps, 143, 144, 151, 152

Acadèmia Olímpia, 23, 144

Ampère, A. M., 94

atòmica

teoria, 53

atomisme, 107

Avogadro

hipòtesi d', 95

nombre d', 37, 94

Avogadro, A., 94

Besso, M., 18, 19, 49, 53, 148,
193

BKS, 51, 52

Bohr, N., 51

Boltzmann

constant de, 37

principi de, 39–42, 64–66, 68

Boltzmann, L., 24, 25, 35, 38,
40, 41, 93

Born, M., 52, 108

Bothe, W., 52

Brown, R., 97, 98

brownià

moviment, 93, 95, 97–100,
102, 104, 105, 107, 108,
111

Bucherer, A., 154

Bureau des Longitudes, 147

camins lliures mitjans, 97

camp

electromagnètic, 152

gravitatori, 156

magnètic, 139, 152, 154

Cannizzaro, S., 94

capillaritat, 21

capil·lars

forces, 112

ciències socials, 105

cinètica

teoria, 24, 25, 39, 57, 58, 66,
93, 95, 96, 98, 107, 109,
122

cinemàtica, 136, 144, 145, 148,
149, 151

cineticomolecular

teoria, 111, 112, 115, 144

complex de llum, 183, 184

complexions, 40, 41

Compton

efecte, 51, 52

Compton, A. H., 51

concentració, 100, 103

- constant universal dels gasos, 37, 58, 100
- cos negre, 34
 - distribució espectral del, 37, 41, 49
 - radiació del, 25, 26, 36, 38, 42, 43, 56, 58, 60, 62, 63, 68, 70, 96
- cossos rígids, 160, 171, 187
- creació i anihilació, 155
- densitat
 - d'electricitat, 187
 - d'energia, 35, 49
- desordre, màxim, 35
- desplaçament
 - lleí del, 38
 - mitjà, 104, 122
 - quadràtic mitjà, 103, 105
- difusió
 - coeficient de, 101, 103, 116–121
 - equació diferencial de la, 103, 120
 - procés de, 100, 117, 118
- dinamos, 146
- Dirac, P. A. M., 52
- dispersió
 - de la llum, 96
 - de raigs X, 51
- dispositius electromagnètics, 147
- dissolucions, 94, 97, 98, 100
- distribució
 - de velocitats, 72
 - densitat de, 69
- espectral, 35
- Drude, P., 140, 144
- econofísica, 105
- efecte Doppler, 47, 152, 182
- Ehrenfest, P., 40, 43
- Einstein
 - màquina d', 106
- Einstein, A., 18–26, 34, 35, 38–54, 93–106, 108, 115, 182, 183, 185, 227
- electró, 152, 154
 - teoria de l', 152, 156
- electròmetres, 146
- electricitat de contacte, 96
- electrodinàmica, 25, 136, 137, 139–141, 143–145, 147–149, 151–153, 156
- electromagnetisme, 139, 145
- electrotecnologia, 145
- equacions de la mecànica, 160
- equilibri
 - condició d', 116
 - dinàmic, 58, 60, 117, 118
 - estat d', 116
 - químic, 20
 - tèrmic, 38, 39
 - termodinàmic, 116
- equivalència entre massa i energia, 153, 154
- esdeveniments simultanis, 161, 165
- espai i temps, 147, 148
- estadístic
 - mètode, 35, 38, 41
 - pes, 43

- estadística
 - concepció, 25
 - descripció, 35
 - distribució, 118, 121
 - física, 25
 - interpretació, 52
 - mecànica, 24, 38, 41, 93, 94, 96, 100, 107, 109
 - probabilitat, 40, 41, 59, 65, 67
- estocàstics
 - processos, 102, 105
- èter, 60, 139–142, 150, 183
 - lumínic, 160
- Exner, F., 99
- experiment de Michelson-Morley, 141, 149, 150, 156
- Föppl, A., 140
- fenòmens tèrmics, 144
- ferrocarril, 146
- filosofia empirista, 150
- FitzGerald, G., 142
- Fizeau
 - experiment de, 149, 150
- fluctuació, 38, 106
- fluctuació-disipació, 104
- força elèctrica i magnètica, 152
- fotoelèctric
 - efecte, 26, 34, 39, 44–46, 48, 50, 54, 72
- fotoluminescència, 56, 69
- fotons, 50, 52
- Galison, P., 147
- Gedanken-Experimente, 50
- Geiger, H., 52
- Gibbs, J. W., 24, 41, 93
- Gouy, L. G., 99
- gravitació, 136, 156, 157
- Grossmann, M., 19, 20
- Habicht, C., 144
- Heisenberg, W., 52
- Helmholtz, H., 25
- Hertz, H. R., 25, 45, 140, 144
- Holton, G., 150
- Hopf, L., 97
- Hume, D., 144, 145
- inèrcia, 136, 153
- indeterminisme, 53
- infraroig, 36
- interferometria, 141
- ionització
 - de gasos, 44, 46, 73
 - energia d', 46, 47
 - potencial d', 73
 - treball d', 73
- irreversibilitat, 35
- Karlsruhe, 94
- Kaufmann, W., 154
- Kelvin, lord, 145
- Kleiner, A., 21
- Kramers, H. A., 51
- Kurlbaum, F., 36, 37
- Langevin
 - equació de, 105
- Langevin, P., 105

- Larmor, J., 140
 Laue, M., 155
 Lenard, P. E. A., 26, 45, 46, 70, 72, 73
 Lewis, G. N., 50
 Lieserl, 21
 llum, 136, 140, 147, 153
 Lorentz
 teoria de, 156
 Lorentz, H. A., 25, 141–143, 150, 156, 187, 188
 Loschmidt
 nombre de, 95
 Loschmidt, J., 95, 96
 luminescència, 44, 72
 Lummer, O., 36

 mètodes teoricomoleculars, 64
 Mach, E., 25, 34, 144
 Marič, M., 18, 19, 21, 22, 34, 140, 141
 massa
 gravitatòria, 138, 157
 inercial, 138, 156
 Maxwell
 electrodinàmica de, 159
 equacions de, 49, 52, 152, 153
 teoria de, 49, 56–58, 61, 140, 153, 160
 Maxwell, J. C., 25, 96, 141, 145
 Maxwell-Hertz
 equacions de, 152, 176–178, 186, 227
 mecànica ondulatòria, 52

 medi lumínic, 149
 Michelson, A. A., 141, 150
 Millikan, R. A., 48, 50
 Minkowski, H., 20
 molecular
 caos, 35
 constitució, 24, 93, 94, 106, 107
 energia, 96
 estructura, 51
 força, 21, 23
 hipòtesi, 106
 imatge, 114
 moviment, 111, 117, 118
 teoria, 24, 94, 107, 115
 Morley, E. W., 141
 moviment uniforme, 137, 138, 141

 Oficina Suïssa de Patents, 18, 20, 22, 147
 ones electromagnètiques, 140
 Onnes, H. K., 20
 osmòtica
 força, 101
 pressió, 100
 òptica, 136, 142
 dels cossos en moviment, 152, 186
 dels cossos en repòs, 152, 186
 Ostwald, F. W., 20, 107

 patent, 26, 146, 147, 154
 Paty, M., 150
 període de desintegració, 155
 Perrin, J. B., 95, 97, 106–108

- pes atòmic, 155
- Planck
 - constant de, 37
 - fórmula de, 38, 39, 60
 - hipòtesi de, 49
 - lleï de, 42
 - quàntums de, 44
 - ressonadors de, 38
- Planck, M., 26, 34–40, 43, 47, 49, 59, 60, 137, 155, 190
- Poincaré, H., 98, 99, 142–144, 147
- Premi Nobel, 45, 53, 54, 157
- pressió
 - de radiació, 152, 183, 186
 - osmòtica, 67, 111, 112, 115, 116
- Preussische Akademie der Wissenschaften, 157
- principi
 - d'equipartició, 39
 - d'equivalència, 156
 - de constància de la velocitat de la llum, 163, 164, 166, 167, 169, 227
 - de relativitat, 136, 138, 139, 141, 149–153, 156, 159, 163, 164, 167, 169, 177, 179, 183, 188, 189, 227, 228
 - de relativitat de Galileu, 138
 - segon, 24
- principis
 - de conservació de la massa i de l'energia, 153
 - fonamentals, 149
- Pringsheim, E., 36
- probabilística
 - descripció, 24
- probabilitat, 39–41, 65, 66, 68, 102, 109
 - distribució de, 107
- quàntic
 - estat, 43
- quàntica
 - estructura, 45
 - física, 25, 52
 - hipòtesi, 43, 48, 49, 51
 - idea, 42
 - mecànica, 52, 53
 - teoria, 48, 51, 54, 108, 157
- quàntums, 48, 50, 157
 - d'energia, 26, 42, 44, 45, 96
 - de llum, 47, 53
 - de radiació, 53
 - hipòtesi dels, 47
- quantificació
 - de l'energia, 43
- radiació, 40, 44, 46, 49, 58, 59, 191, 230
 - catòdica, 72
 - densitat de, 61, 62
 - distribució d'energia de la, 49
 - electromagnètica, 51, 52, 153
 - energia de, 60, 68
 - entropia de la, 42, 62, 64, 67

- intensitat de, 45
- lleï de, 38
- monocromàtica, 42, 43, 68
- natural, 35
- no de Wien, 70
- tèrmica, 34, 36, 39, 41
- radioactivitat, 154
- raigs β , 154
- raigs canals, 47
- raigs catòdics, 26, 44, 45, 56, 70, 73
- Rayleigh-Jeans
 - lleï de, 39
- reaccions nuclears, 155
- refrigeradors, 145
- relativitat, 143–147, 149–151, 155, 156
 - teoria de la, 54, 108, 136, 137, 149, 154, 157
- relativitat especial, 51, 148, 156, 157
- relativitat general, 138, 157
- rellotges en moviment, 171
- repòs
 - absolut, 159, 160
 - espai en, 165
 - observador en, 180
 - regle en, 165
 - rellotges en, 165, 166
 - sistema de coordenades en, 180, 181
 - sistema en, 160, 162–169, 171–173, 176, 179, 184, 186, 188, 190
 - ressonador, 35, 37–41
 - Rubens, H., 36, 37, 48
 - Schrödinger, E., 53
 - senyal lluminós, 147, 161, 165
 - servei militar, 23
 - simultaneïtat, 143, 145, 147, 151
 - simultani, 162
 - sincronisme, 162, 164
 - sincronització, 146, 147
 - sincronitzat, 166
 - sistema inercial, 139
 - Slater, J. C., 51
 - Smoluchowski, M. von, 104
 - Solovine, M., 23, 144
 - Solvay
 - Cinquè Congrés, 50
 - Primer Congrés, 48
 - Staley, R., 151, 156
 - Stark, J., 155
 - Stokes
 - regla de, 44–46, 69, 70, 72
 - teoria de, 101
 - Stokes, G. G., 94
 - suspensió
 - cossos en, 111–115
 - partícules en, 93, 98, 100–104, 106, 108, 116–118
 - substància en, 117
 - tecnologia, 145–148
 - telègraf, 145, 146
 - temps
 - local, 142
 - universal de Greenwich, 147

- teorema
 - d'addició de les velocitats, 152
 - dels estats corresponents, 142
- teoria energètica, 107
- termodinàmic
 - estat, 24
 - sistema, 35, 39
- termodinàmica, 21, 35, 37, 93, 111, 113, 144
 - de la radiació, 26, 42, 68
 - energia, 96
 - lleis de la, 24
 - segona llei de la, 25
- tesi doctoral, 20, 21, 94, 96, 97, 100, 105, 108
- Thomson, W., 145
- transformació
 - de Galileu, 139
 - de Lorentz, 142, 143, 151, 169
- turbines, 145
- ultraviolada
 - catàstrofe, 40
 - llum, 26, 44, 46, 57, 73
- ultraviolat
 - límit, 71
- Van't Hoff
 - teoria de, 94
- velocitat de la llum, 149, 152
- viscositat, 100, 101
 - coeficient de, 117, 118
 - força de, 101, 104
- Weber, H. F., 20, 34
- Wien
 - fórmula de, 34, 35, 37, 43, 49, 68
 - lleï de, 36, 42, 43, 45, 63, 70, 96
- Wien, W., 26, 42, 61
- zones horàries, 147

